PROBLÈME I
Petits poids

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, et toute suite finie de n réels $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on appelle *poids* de la suite la plus grande des valeurs $|x_1|$, $|x_1+x_2|$, …, $|x_1+x_2+\cdots+x_n|$.
Par exemple, pour $n=4$ et $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(4,4,0,-9)$, le poids de la suite est égal à 8, car

$$|x_1|=4,\ |x_1+x_2|=8,\ |x_1+x_2+x_3|=8 \quad\text{et}\quad |x_1+x_2+x_3+x_4|=1.$$

Pour $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-9,4,0,4)$, le poids est égal à 9, car

$$|x_1|=9,\ |x_1+x_2|=5,\ |x_1+x_2+x_3|=5 \quad\text{et}\quad |x_1+x_2+x_3+x_4|=1.$$

On remarque que les deux suites finies ci-dessus sont formées des mêmes nombres dans un ordre différent et qu'elles ont des poids différents.

1° Déterminer le poids des suites finies suivantes :

a) $(3,5,-6,-8,2)$ (et donc $n=5$).

b) $(1,2,3,\ldots,2014,2015,-2015,-2014,\ldots,-2,-1)$ (et donc $n=4030$).

c) Dans chacun des deux exemples précédents, réordonner les termes de façon à obtenir un poids plus petit.

On donne à Isabelle et Clara la même suite finie de n réels $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Isabelle veut la réordonner de façon à obtenir une suite finie de poids minimal. Pour cela, elle considère tous les ordres possibles de ces n réels, détermine pour chacun le poids de la suite correspondante, et choisit un ordre pour lequel le poids est minimal. On note I ce poids minimal.

De son côté, Clara, plus pressée qu'Isabelle, adopte l'algorithme suivant.
Elle commence par choisir parmi les n réels un nombre, noté c_1, de sorte que la valeur de $|c_1|$ soit la plus petite possible. Elle choisit ensuite le nombre c_2 parmi les $n-1$ réels qui restent, afin que la valeur de $|c_1+c_2|$ soit la plus petite possible. Plus généralement, après avoir choisi les nombres $c_1, \ldots, c_i$ parmi les n réels donnés au départ, elle choisit c_{i+1} parmi les $n-i$ restants de sorte que la valeur de $|c_1+\cdots+c_i+c_{i+1}|$ soit la plus petite possible.
Elle obtient finalement une suite finie $(c_1, \ldots, c_n)$ de n réels. On note C son poids.

2° Déterminer I et C dans les deux cas suivants.

a) $n=3$ et $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=-4$.

b) $n=4$ et $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=2,\ x_4=-2$.

3° Si $n=2$, montrer que $I=C$.

4° Si $n=3$, montrer que $C \leqslant \frac{3}{2} I$.

5° Soit n un entier supérieur ou égal à 4 et soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la suite finie donnée à Isabelle et Clara. On pose

$$M=\max(|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|) \qquad S=|x_1+x_2+\cdots+x_n| \qquad N=\max(M,S).$$

Autrement dit, M est le plus grand des nombres $|x_1|$, $|x_2|, \ldots, |x_n|$. De même, N est le plus grand des nombres M et S.

a) Montrer que $S \leqslant I$.

b) Montrer que $M \leqslant 2I$.

c) Montrer que $C \leqslant N$.

d) En déduire que $C \leqslant 2I$.

e) Déterminer n réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que $C=2I$.

PROBLÈME II
Tétraèdres

On appelle *tétraèdre* la donnée, dans l'espace, de quatre points non coplanaires A, B, C, D. Les *arêtes* du tétraèdre sont les segments $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$, $[BD]$, $[CD]$.

Dans les questions 1° à 3°, $ABCD$ désigne un tétraèdre.

1° a) Montrer qu'il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG_A}$, où G_A est le centre de gravité du triangle BCD.

c) On appelle *médiane* issue de A la droite reliant A au centre de gravité du triangle BCD, et on définit de façon analogue les trois autres médianes, issues de B, de C et de D. Montrer que les médianes sont concourantes au point G.

2° Montrer qu'il existe une unique sphère qui passe par A, B, C, D. On l'appelle *sphère circonscrite* au tétraèdre $ABCD$ et on note O son centre.

3° On appelle *hauteur* issue de A la droite passant par A et orthogonale au plan BCD. On définit de façon analogue les trois autres hauteurs, issues de B, de C et de D. On dit qu'un tétraèdre de l'espace est *régulier* si toutes ses arêtes sont de même longueur.

a) Est-il vrai que les hauteurs sont concourantes en O si et seulement si le tétraèdre est régulier ?

b) Les hauteurs sont-elles nécessairement concourantes ?

c) Est-il vrai que les hauteurs sont concourantes en G si et seulement si le tétraèdre est régulier ?

4° Dans ce qui suit, le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ est noté $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$.

Soit $\Delta_1,\dots,\Delta_4$ quatre droites distinctes non coplanaires concourantes en un point H. Pour $1\leqslant i\leqslant 4$, on choisit un vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{u_i}$ de Δ_i et, pour $1\leqslant i,j\leqslant 4$, on note $c_{ij}=\overrightarrow{u_i}\cdot\overrightarrow{u_j}$.

a) On suppose qu'il existe un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ dont les hauteurs sont concourantes en H et tel que $A_j\in\Delta_j$ pour tout $j\in\{1,2,3,4\}$. Montrer que $c_{12}c_{34}=c_{13}c_{24}=c_{14}c_{23}$.

b) Réciproquement, si $c_{12}c_{34}=c_{13}c_{24}=c_{14}c_{23}\neq 0$, montrer qu'il existe un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ dont les hauteurs sont concourantes en H et tel que $A_j\in\Delta_j$ pour tout $j\in\{1,2,3,4\}$.

PROBLÈME III
Moyennes prévisionnelles

Dans ce problème, on considère des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}=(u_1,u_2,\dots)$ à valeurs réelles indexées par les entiers naturels non nuls. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de type $\mathscr{M}$ si, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n est la moyenne des n termes suivants, c'est-à-dire

$$u_n=\frac{u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{2n-1}+u_{2n}}{n}.$$

1° Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de type $\mathscr{M}$ et C un nombre réel. Que dire de la suite $(u_n-C)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

2° Montrer que toute suite croissante de type $\mathscr{M}$ est constante.

3° Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de type $\mathscr{M}$. On suppose qu'il existe des réels a, b, c tels que $u_n=an^2+bn+c$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $a=b=0$.

4° L'objectif de cette question 4° est de montrer que toute suite majorée ou minorée de type $\mathscr{M}$ est constante.

Dans les questions a) et b), on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de type $\mathscr{M}$ à valeurs positives ou nulles, et on considère un entier $r\in\mathbb{N}^*$.

a) Soit p un entier tel que $p>r$. Montrer qu'il existe des entiers naturels non nuls q et q' tels que $q<p\leqslant q'\leqslant 2q$ et $u_{q'}\leqslant u_q\leqslant u_r$. En déduire que $u_p\leqslant 3u_r$.

b) Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, montrer que $u_p\leqslant 3u_r$.

Dans les questions c) et d), on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite minorée de type $\mathscr{M}$.

c) Soit D un réel strictement positif et soit $p\in\mathbb{N}^*$. Montrer que si u_p-D n'est pas un minorant de la suite (u_n), alors $u_p-\frac{3}{2}D$ n'est pas non plus un minorant.

d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.

e) Conclure.

5° Existe-t-il une suite non constante de type $\mathscr{M}$?