Corrigé du Concours Général 2012

I. Les premiers sont en hauts, les exposants sont en bas

1. (a) On a $2012 = 4 \times 503 = 2^2 \times 503$ et 503 est premier (il suffit pour cela de tester à la calculatrice s'il y a des diviseurs premiers inférieurs à $\sqrt{503} \simeq 22.4$). Par définition, on a donc

$$\boxed{f(2012) = 2^2 \times 1^{503} = 4.}$$

(b) On a d'abord

$$36^{36} = (4 \times 9)^3 6 = 2^{72}3^{72}$$

donc

$$\boxed{f(36^{36}) = 72^5 = (8 \times 9)^5 = 2^{15}3^{10}}$$

et donc

$$\boxed{f^2(36^{36}) = 15^2 10^3 = 2^3 3^2 5^5}$$

puis finalement

$$\boxed{f^3(36^{36}) = 3^2 2^3 5^5 = f^2(36^{36}).}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{n+2}(36^{36}) = f^n(f^2(36^{36})) = f^n(f^3(36^{36})) = f^{n+3}(36^{36})$$

et <u>les termes suivants sont tous égaux</u>.

2. (a) D'après l'énonce, on a <u>$f(128) = 49 \neq 128$</u> et ainsi, puisque $49 = 7^2$, <u>$f^2(128) = 2^7 = 128$</u> et nécessairement $f^2(49) = 49$.
On a ainsi, pour tout $\in \mathbb{N}$,

$$f^{2(n+1)}(128) = f^{2n}(f^2(128)) = f^{2n}(128)$$

et la suite $\left(f^{2n}(128)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc constante (égale à 128). De même, on montre que $\left(f^{2n+1}(128)\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(f^{2n}(49)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante (égale à 49) et finalement, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{f^{i+2}(128) = f^i(128) \quad \text{et} \quad f^{i+1}(128) \neq f^i(128)}$$

en distinguant les cas i pair et impair.

(b) On a, toujours d'après l'énoncé,

$$f(128) = 49 \quad \text{et} \quad f(49) = 128 > f(128)$$

et <u>f n'est pas croissante</u>. De même, on a

$$f(720) = 128 \quad \text{et} \quad f(128) = 49 < f(720)$$

et <u>f n'est pas décroissante</u>.

3.
On décompose n en facteurs premiers sous la forme $n = p_1^{a_1}...p_k^{a_k}$ de sorte que $f(n) = a_1^{p_1}...a_k^{p_k}$.

(a) L'équation $f(n) = 1$ se réécrit

$$a_1^{p_1}...a_k^{p_k} = 1$$

et, puisque $a_1, ..., a_k$ sont des entiers non-nuls, on a nécessairement

$$a_1 = ... = a_k = 1$$

et finalement $n = p_1...p_k$. k étant quelconque, les solutions de $f(n) = 1$ sont <u>les produits de nombres premiers deux à deux distincts</u>.

(b) L'équation s'écrit

$$a_1^{p_1}...a_k^{p_k} = 2$$

et l'un au moins des entiers a_i est supérieur à 2. Puisque $p_i \geq 2$, le membre de gauche de l'égalité plus grand que 4 et <u>il n'y a pas de solutions à l'équation $f(n) = 2$</u>.

(c) L'équation s'écrit
$$a_1^{p_1}...a_k^{p_k} = 4;$$
l'un des entiers a_i est supérieur à 2 et puisque $p_i \geq 2$, on a nécessairement $p_i = 2$ puis $a_j = 1$ si $j \neq i$. k étant quelconque, l'ensemble cherché est

$$\boxed{\{4p_1...p_k \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*,\ p_1, ..., p_k \text{ nombres premiers deux à deux distincts et différents de } 2\}.}$$

4. (a) Si $b = 0$ ou 1, le résultat est acquis. Fixons $a \geq 2$ et montrons par récurrence sur $b \in \mathbb{N}^*$ que $ab \leq a^b$.
   - L'initialisation a été faite ci-dessus.
   - Si le résulat est acquis pour $b \in \mathbb{N}^*$, on a alors
   $$a(b+1) = ab + a \leq a^b + a \leq a^b + a^b \leq 2a^b \leq a^{b+1}$$
   puisque $b \geq 1$ et $a \geq 2$.

   Ainsi
   $$\boxed{\text{si } a \geq 2 \text{ et } b \geq 0, \text{ on a bien } ab \leq a^b.}$$
   (b) Procédons cette fois-ci par récurrence sur le nombre d'entiers $k \in \mathbb{N}^*$.
   - Si $k = 1$, le résulat est vrai d'après la question précédente.
   - Si le résulat est acquis pour $k \in \mathbb{N}^*$, il suffit de traiter le cas où tous les $(b_i)_{1\leq i\leq k+1}$ sont non-nuls (sinon seuls k entiers interviennent). Dans ce cas, on a alors
   $$a_1b_1 + ... + a_kb_k + a_{k+1}b_{k+1} \leq \underbrace{a_1^{b_1}...a_k^{b_k}}_{:=x} + \underbrace{a_{k+1}^{b_{k+1}}}_{:=y}$$
   d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence. Il suffit maintenant de montrer que
   $$x + y \leq xy \ \text{ soit encore } \ 1 \leq (x-1)(y-1)$$
   ce qui est vrai car, les entiers a_i étant supérieurs à 2, on a $x, y \geq 2$.

   Ainsi, si $k \in \mathbb{N}^*$, $a_1, ..., a_k$ des entiers supérieurs à 2 et $b_1, ..., b_k$ sont des entiers
   $$\boxed{a_1b_1 + ... + a_kb_k \leq a_1^{b_1}...a_k^{b_k}}$$
   (c) On reprend les notations de la question 3 et on décompose les nombres $a_1, ..., a_k$ en facteurs premiers en utilisant la même décomposition pour tous les entiers. En notant $\mathcal{P}$ les nombres premiers (intervenant dans l'une des décompositions des a_i), on peut écrire
   $$\forall i \in \{1, ..k\},\ a_i = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{b_i(p)}$$
   où $b_i(p)$ peut être égal à 0. On a alors
   $$\begin{aligned} f(n) &= a_1^{p_1}...a_k^{p_k} \\ &= \left(\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{b_1(p)}\right)^{p_1} ... \left(\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{b_k(p)}\right)^{p_k} \\ &= \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{p_1b_1(p)+...+p_kb_k(p)}. \end{aligned}$$
   Ainsi,
   $$f(f(n)) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(p_1b_1(p) + ... + p_kb_k(p)\right)^p.$$
   On a d'abord, d'après la question précédente et pour tout $1 \leq i \leq k$,
   $$p_1b_1(p) + ... + p_kb_k(p) \leq p_1^{b_1(p)}...p_k^{b_k(p)}$$
   et donc
   $$f(f(n)) \leq p_1^{\sum_{p\in\mathcal{P}} pb_1(p)}...p_k^{\sum_{p\in\mathcal{P}} pb_k(p)}.$$
   Maintenant, la question précédente nous fournit également, pour tout $1 \leq i \leq k$,
   $$\sum_{p\in\mathcal{P}} pb_i(p) \leq \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{b_i(p)} = a_i$$
   et finalement

$$\boxed{f(f(n)) \leq p_1^{a_1}...p_k^{a_k} = n.}$$

(d) D'après la question précédente les deux suites $(f^{2k}(n))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(f^{2k+1}(n))_{k\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes. L'ensemble des valeurs prises par ces suites à valeurs entières est donc fini et leurs valeurs minimales sont atteintes au moins une fois. Étant décroissantes, elles stationnent de plus en ces valeurs :

$$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}; \quad \forall k \geq k_1, f^{2k}(n) = f^{2k_1}(n) \quad \text{et} \quad \forall k \geq k_2, f^{2k+1}(n) = f^{2k_2+1}(n).$$

Finalement, pour tout $i \geq \max(2k_1, 2k_2+1) := r$,

$$\boxed{f^{i+2}(n) = f^i(n).}$$

5. (a) Si a est pair, il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $\underline{a = 2\alpha + 3\beta \text{ avec } \beta = 0}$. Sinon a est impair supérieur à 3, il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$a = 2k+1 = 2(k-1) + 3 \times 1$$

et $\underline{(\alpha, \beta) = (k-1, 1) \text{ convient}}$.

(b) Soit $n = p_1^{a_1}...p_k^{a_k} \in E$. D'après la question précédente, pour tout $1 \leq i \leq k$, il existe α_i, β_i tels que

$$a_i = 2\alpha_i + 3\beta_i$$

et donc

$$\begin{aligned} n &= (p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k})^2 \left(p_1^{\beta_1}...p_k^{\beta_k}\right)^3 \\ &= f\left(2^{p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}} 3^{p_1^{\beta_1}...p_k^{\beta_k}}\right) \end{aligned}$$

et on peut choisir $\underline{m = 2^{p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}} 3^{p_1^{\beta_1}...p_k^{\beta_k}}}$.

(c) On peut effectuer ce qui a été fait dans la question précédente ou écrire plus simplement

$$2012^{2012} = (2012^{1006})^2 = f\left(2^{2012^{1006}}\right)$$

pour choisir $\underline{m = 2^{2012^{1006}}}$.

(d) Soit n tel qu'existe m vérifiant $f(m) = n$. On a, notant $m = p_1^{a_1}...p_k^{a_k}$ et en reprenant les notations de la question 4.c),

$$n = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{p_1 b_1(p) + ... + p_k b_k(p)}$$

et il suffit alors de constater que, pour tout $p \in \mathcal{P}$,
- soit $p_1 b_1(p) + ... + p_k b_k(p) = 0$ et alors $b_1(p) = ... = b_k(p) = 0$,
- sinon, il existe i tel que $b_i(p) \geq 1$ et donc, puisque $p_i \geq 2$,

$$p_1 b_1(p) + ... + p_k b_k(p) \geq b_i(p) p_i \geq 2.$$

On a donc bien $n \in E$ et $\underline{\text{la réciproque du b) est vraie}}$.

II. Une suite majoritairement décroissante

Faisons d'abord quelques constations élémentaires. On a $u_0 = 1$ puis, par définition de la suite, $u_1 \leq 1/2$, $u_2 \leq 1/2$ et alors $u_3 \leq 1/4$...
Cela suggère de montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ le résultat suivant :

$$\forall n \geq 2^k - 1,\ u_n \leq \frac{1}{2^k}. \tag{1}$$

- Si $k = 0$, il s'agit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$. Montrons-le par récurrence forte sur n.
Le résultat est évidemment acquis pour $n = 0$. De plus, si $n \in \mathbb{N}^*$ est tel que $u_k \leq 1$ pour tout entier $k < n$, alors, par définition de la suite u et puisque $n \geq 1$, on a l'existence de $k < n$ tel que $2u_n \leq u_k \leq 1$ et on a donc bien $u_n \leq 1$.
- Si maintenant le résultat est vrai pour un certain entier k, montrons-le pour $k+1$. Si $n \geq 2^{k+1} - 1$, on doit montrer $u_n \leq 2^{-(k+1)}$. On a d'abord

$$\frac{n}{2} \geq 2^k - \frac{1}{2}$$

et donc, par hypothèse sur u, il y a au moins 2^k entiers l vérifiant $u_l \geq 2u_n$. Puisque $\{0, ..., 2^k - 2\}$ est de cardinal strictement inférieur à 2^k, il existe nécessairement un entier $l \geq 2^k - 1$ comme ci-dessus.
Notre hypothèse de récurrence fournit alors, pour cet entier l,

$$u_n \leq \frac{u_l}{2} \leq \frac{1}{2^{k+1}}$$

et la conclusion voulue.

D'autre part, si $n \in \mathbb{N}$, puisque la suite d'entiers $(2^k - 1)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante de premier terme 0, il existe un unique $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$2^k - 1 \leq n < 2^{k+1} - 1.$$

On a par ailleurs

$$2^{k+1} - 2 \geq n \quad \text{donc} \quad 2^k \geq \frac{n+2}{2}$$

et, d'après ce qui précède,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^k} \leq \frac{2}{n+2}.$$

Le théorème des gendarmes nous permet finalement de conclure :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } 0.}$$

Remarques :

- On peut aussi montrer directement par récurrence forte sur n l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \frac{2}{n+2}.$$

  Cette preuve, plus facile (et laissée en exercice), fournit cependant un résultat de domination non-optimal : la suite $\left(\frac{2}{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est plus grande que la suite dominante v obtenue au-dessus et définie « par morceaux » par

$$\forall n \in \mathbb{N} \cap [2^k - 1, 2^{k+1} - 1[,\ v_n = \frac{1}{2^k}.$$

- La définition de le limite entrevue au lycée permet de conclure directement dès que l'on a montré (1). En effet, si $[-\varepsilon, \varepsilon]$ (où $\varepsilon > 0$) est un intervalle non-vide contenant 0, on a alors (puisque $\frac{1}{2^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$), pour un entier k suffisamment grand, $-\varepsilon \leq \frac{1}{2^k} \leq \varepsilon$ et donc

$$-\varepsilon \leq 0 \leq u_n \leq \varepsilon \Longrightarrow u_n \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

  dès que n est assez grand (pour que $n \geq 2^k - 1$).
- La notion de borne supérieure (et/ou de limite supérieure) permet également une rédaction plus efficace. En effet, la suite u étant majorée, la suite de terme général $s_n = \sup\{u_k; k \geq n\}$ est décroissante minorée donc convergente vers l. De plus, on a aisément (en notant $\lceil\ \rceil$ la partie entière par excès)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ s_n \leq \frac{1}{2} s_{\lceil n/2 \rceil - 1}$$

  et nécessairement $l = 0$ puis, par comparaison à u_n, le résultat.

III. Le facteur sonne toujours une fois (et une seule)

Rappelons pour commencer l'inégalité triangulaire usuelle.

Proposition 1.

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x + y| \leq |x| + |y|.$$

De plus, l'égalité dans l'inégalité précédente est réalisée si et seulement si x et y sont de même signe.

1. Pour la première maison visitée (exceptée la maison numéro 1 d'où il part), la facteur à $n - 1$ possibilités (les maisons numérotées $2, ..., n$). Pour la deuxième, il n'en a plus que $n - 2$ et ainsi de suite jusqu'à la $n - 1$-ième où il n'a qu'une seule possibilité. Finalement,

$$\boxed{\text{le facteur a } (n-1) \times (n-2) \times ... \times 1 = (n-1)! \text{ trajets possibles.}}$$

2. (a) Numérotons $m_0, m_1, .., m_n$ les numéros de maison visitées (avec $m_0 = m_n = 1$) ; soit également $0 < i < n$ tel que $m_i = n$. La longueur l du trajet correspondant est

$$l = |m_1 - m_0| + ... + |m_i - m_{i-1}| + |m_{i+1} - m_i| + ... + |m_n - m_{n-1}|.$$

   Cependant une application répétée de l'inégalité triangulaire nous fournit

$$|m_1 - m_0| + ... + |m_i - m_{i-1}| \geq |m_i - m_0| = n - 1$$

   et

$$|m_{i+1} - m_i| + ... + |m_n - m_{n-1}| \geq |m_n - m_i| = n - 1$$

   d'où $\underline{l \geq 2(n-1)}$ et ainsi

$$\boxed{\text{tout trajet est de longueur supérieure ou égale à } 2(n-1).}$$

(b) On constate tout d'abord que $1, n, n-1, .., 1$ est un trajet de longueur $2(n-1)$ donc $2(n-1)$ est la longueur minimale. On cherche ensuite à caractériser les trajets de longueurs minimales.
Soit $m_0, ..., m_n$ un trajet de longueur minimale. Reprenant les notations de la question précédente, on a d'après ce qui précède

$$|m_1 - m_0| + ... + |m_i - m_{i-1}| = |m_i - m_0| \ (= n-1) \tag{2}$$

et

$$|m_{i+1} - m_i| + ... + |m_n - m_{n-1}| = |m_n - m_i| \ (= n-1). \tag{3}$$

De plus, s'il existe un entier k tel que $0 < k < i$ ou $i < k < n$ et

$$|m_{k+1} - m_k| + |m_k - m_{k-1}| > |m_{k+1} - m_{k-1}|$$

on a nécessairement, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|m_{i+1} - m_i| + ... + |m_n - m_{n-1}| > |m_n - m_i| \quad \text{ou} \quad |m_{i+1} - m_i| + ... + |m_n - m_{n-1}| > |m_n - m_i|,$$

ce qui est exclu d'après (2) et (3). On a donc, pour tout entier k tel que $0 < k < i$ ou $i < k \leq n$,

$$|m_{k+1} - m_k| + |m_k - m_{k-1}| = |m_{k+1} - m_{k-1}|$$

et d'après le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, $m_{k+1} - m_k$ a même signe que $m_k - m_{k-1}$ pour tout k tel que $0 < k < i$ ou $i < k \leq n$. On en déduit que $m_0 < ... < m_i$ et $m_i > ... > m_n$ et tout trajet $m_0, ..., m_n$ de longueur minimale est strictement croissant puis strictement décroissant. La réciproque étant évidente, il suffit maintenant d'énumérer le nombre de tels trajets.
Choisir un trajet de longueur minimale revient donc, pour tout élément de $\{2, ..., n-1\}$, à choisir s'il sera rangé parmi les termes qui seront réordonnés de manière croissante ou dans ceux qui le seront de manière décroissante (la place de n étant alors imposée). Chacun des $n-2$ éléments ayant deux choix possibles,

$$\boxed{\text{il y a } 2^{n-2} \text{ trajets de longueur minimale.}}$$

3. (a) <u>Cas $n = 5$.</u> D'abord, la distance 4 ne peut être atteinte qu'entre 1 et 5 et donc qu'une seule fois. La distance 3 est réalisée entre 1 et 4 ou 2 et 5 mais ne peut être réalisée plus d'une fois si la distance 4 est atteinte. La distance 2 est réalisée entre 1 et 3 ou 2 et 4 ou 3 et 5 et ne peut pas être réalisée plus de deux fois si les distances 3 ou 4 sont atteintes. Les distances restantes étant égales à 1, on vient de montrer que tout trajet a une longueur inférieure à

$$4 + 3 + 2 \times 2 + 1 = 12$$

Puisque par ailleurs $1, 5, 2, 4, 3, 1$ est de longueur 12, <u>la longueur maximale des trajets est 12</u>.
<u>Cas $n = 6$</u>. La distance 5 ne peut être atteinte qu'entre 1 et 6 et donc qu'une seule fois. La distance 4 est réalisée entre 1 et 5 ou 2 et 6 mais ne peut être réalisée plus d'une fois si la distance 5 est atteinte. La distance 3 est réalisée entre 1 et 4 ou 2 et 5 ou 3 et 6 et ne peut pas être réalisée plus de deux fois si les distances 4 ou 5 sont atteintes. De plus, si les distances précédentes sont toutes atteintes (4 et 5 une fois, 3 deux fois), on constate que les 2 dernières distances ne peuvent être égales à 2. Ainsi, tout trajet a une longueur inférieure à

$$5 + 4 + 3 \times 2 + 2 + 1 = 18$$

Puisque $1, 6, 2, 5, 3, 4, 1$ est de longueur 18, <u>la longueur maximale des trajets est 18</u>.

(b) Pour $m = m_0, ..., m_n$ un trajet, définissons d'abord une suite d'indices entre lesquels m croît ou décroît. On commence par poser $b_1 = 0$ et considérer h_1 le plus grand indice $k \geq b_1$ tel que $m_k > m_{k-1}$. On définit ensuite b_2 comme le plus grand indice $k \geq h_1$ tel que $m_k < m_{k-1}$. On construit ainsi de suite deux séquences $b_1 = 0, .., b_k, b_{k+1} = n$ et $h_1, ..., h_k$ telles que (m_i) est croissante entre b_i et h_i puis décroissante entre h_i et b_{i+1}.
On constate alors que la longueur l du trajet est donnée par

$$\begin{aligned} l &= m_{h_1} - m_{b_1} + m_{h_1} - m_{b_2} + ... + m_{h_k} - m_{b_k} + m_{h_k} - m_{b_{k+1}} \\ &= 2\left((m_{h_1} + ... + m_{h_k}) - (m_{b_1} + ... + m_{b_k})\right) \end{aligned}$$

puisque $m_{b_{k+1}} = 1 = m_{b_1}$. Renumérotant si besoin est les suites (m_{h_i}) et (m_{b_i}) de telle sorte qu'elles soient (strictement) croissante et décroissante, on a alors, par une récurrence immédiate et pour tout i tel que $1 \leq i \leq k$,

$$m_{h_i} \leq n + 1 - i \quad \text{et} \quad m_{b_i} \geq i$$

et ainsi

$$\begin{aligned} l &= 2(m_{h_1} - m_{b_1} + m_{h_2} - m_{b_2} + ... + m_{h_k} - m_{b_k}) \\ &\leq 2((n-1) + (n-3) + ... + (n-2k+1)) \\ &\leq 2k(n-k). \end{aligned}$$

En distinguant maintenant les cas pairs et impairs, on constate que $k \mapsto k(n-k)$ atteint son maximum en $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ [1] (la fonction réelle $x \mapsto x(n-x)$ est d'abord croissante sur $]-\infty, n/2]$ puis décroissante) et on en déduit que

$$l \leq 2\left[\frac{n}{2}\right]\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right) = \left[\frac{n^2}{2}\right].$$

Par ailleurs, cette valeur est atteinte en prenant $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ et $m_{h_i} = n+1-i$, $m_{b_i} = i$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq k$,

$$\boxed{\text{la valeur maximale d'un trajet est donc de } \left[\frac{n^2}{2}\right].}$$

4. Notons e_n l'espérance cherchée. Par définition, on a, notant $l(m)$ la longueur du trajet m,

$$\begin{aligned}(n-1)!e_n &= \sum_{m \text{ trajet de taille } n} l(m) \\ &= \sum_{m \text{ trajet de taille } n} \sum_{k=1}^{n} |m_k - m_{k-1}| \\ &= \sum_{m \text{ trajet de taille } n} |m_1 - 1| + \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{m \text{ trajet de taille } n} |m_k - m_{k-1}| + \sum_{m \text{ trajet de taille } n} |m_{n-1} - 1| \quad (4)\end{aligned}$$

puisque $m_0 = m_n = 1$. De plus, puisque qu'il y a $(n-2)!$ trajets vérifiant $m_1 = x$ si $x > 1$ et 0 sinon,

$$\sum_{m \text{ trajet de taille } n} |m_1 - 1| = (n-2)! \sum_{x=2}^{n} (x-1) = (n-2)! \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n!}{2}$$

et, de même,

$$\sum_{m \text{ trajet de taille } n} |m_{n-1} - 1| = \frac{n!}{2}.$$

D'autre part, pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq n-1$ et puisque qu'il y a $(n-3)!$ trajets vérifiant $m_k = x$ et $m_{k-1} = y$ si $x \neq 1$ et 0 si $x = 1$, si $x > 1$ et $y > 1$ sont distincts et 0 sinon,

$$\sum_{m \text{ trajet de taille } n} |m_k - m_{k-1}| = (n-3)! \sum_{2 \leq x \neq y \leq n} |x - y|$$

et puisque, d'après la définition combinatoire des coefficients binômiaux et grâce au changement d'indice $x = t+1$,

$$\begin{aligned}\sum_{2 \leq x \neq y \leq n} |x-y| &= \sum_{2 \leq x, y \leq n} |x-y| \\ &= 2 \sum_{2 \leq x \leq y \leq n} (y - x) \\ &= 2 \sum_{1 \leq t < y \leq n} (y - t - 1) \\ &= 2 \sum_{1 \leq t < z < y \leq n} 1 \\ &= 2\binom{n}{3} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3}\end{aligned}$$

on conclut donc d'après (4) que

$$\begin{aligned}(n-1)!e_n &= n! + (n-2) \times (n-3)! \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \\ &= \frac{n!}{3}(3 + n - 2).\end{aligned}$$

On a ainsi finalement, pour tout $n \geq 2$,

$$\boxed{e_n = \tfrac{n(n+1)}{3}.}$$

1. en notant $[x]$ la partie entière du réel x