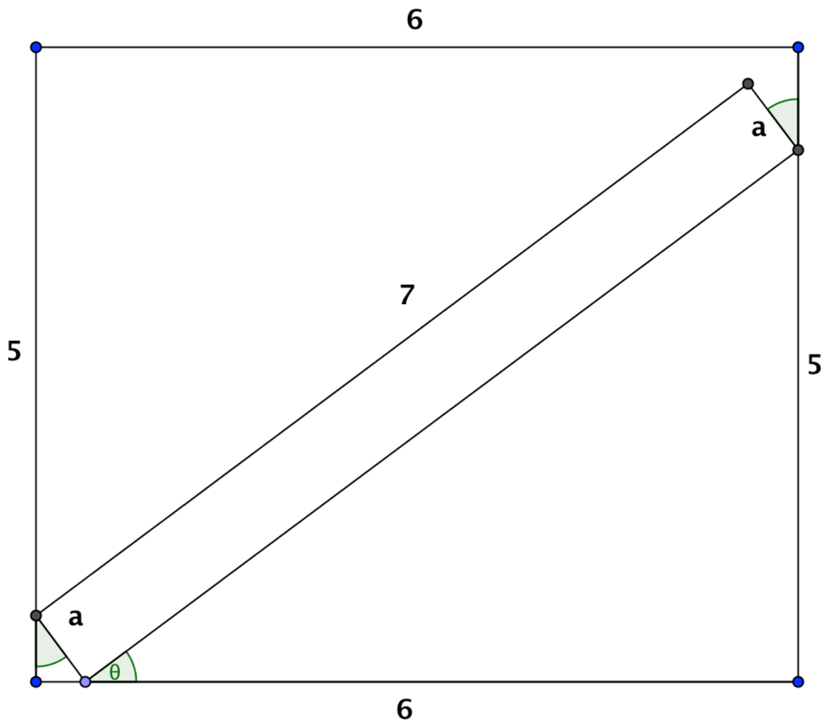
éléments de corrigé du concours général de maths 2011 .
Il peut subsister des erreurs, des simplifications possibles et dans l'avenir des modifications.

exercice 1



On peut toujours positionner la barre comme indiqué sur la figure ci-dessus.
θ croit (quand le point de contact avec le bas se déplace vers la droite)
de θ_0 tel que $\cos\theta_0 = \frac{6}{7}$ à θ_1 tel que $\sin\theta_1 = \frac{5}{7}$

$a \sin\theta + 7\cos\theta = 6$, donc $a = \dfrac{6 - 7\cos\theta}{\sin\theta}$.

Soit $f(\theta) = \dfrac{6 - 7\cos\theta}{\sin\theta}$, alors $f'(\theta) = \dfrac{7 - 6\cos\theta}{\sin^2\theta} > 0$, donc f est croissante sur $[\theta_0 ; \theta_1]$

Quand θ augmente, a augmente.

La hauteur 5 du rectangle donne la condition $7\sin\theta + a\cos\theta \le 5$

soit $7\sin\theta + \dfrac{6 - 7\cos\theta}{\sin\theta}\cos\theta \le 5$

Soit $g(\theta) = 7\sin\theta + \dfrac{6 - 7\cos\theta}{\sin\theta}\cos\theta$, alors $g'(\theta) = 14\cos\theta - 6 + \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}(7 - 6\cos\theta) > 0$
sur $[\theta_0 ; \theta_1]$, donc g est croissante sur $[\theta_0 ; \theta_1]$.
$g(\theta_0) \le 5$ et $g(\theta_1) \ge 5$, donc il existe un unique θ_M dans $[\theta_0 ; \theta_1]$ tel que $g(\theta_M) = 5$
g étant croissante, on doit prendre $\theta \le \theta_M$, sinon on dépasse la largeur 5.
La fonction f est croissante, donc le maximum de $f(\theta)$ avec la barre contenue dans le colis sera atteinte pour $\theta = \theta_M$.

θ_M vérifie donc le système $\begin{cases} 7\sin\theta_0 + a\cos\theta_0 = 5 \\ a\sin\theta_0 + 7\cos\theta_0 = 6 \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} \cos\theta_0 = \dfrac{5a - 42}{a^2 - 49} \\ \sin\theta_0 = \dfrac{6a - 35}{a^2 - 49} \end{cases}$

De $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on déduit que $(5a - 42)^2 + (6a - 35)^2 = (a^2 - 49)^2$
Après développement, $a^4 - 159a^2 + 840a - 588 = 0$

On cherche à écrire l'équation sous la forme $(a^2 + t)^2 = P(a)$ où P est un polynôme du second degré à discriminant nul, pour le mettre sous la forme d'un carré.
$(a^2 + t)^2 = a^4 + 2ta^2 + t^2$ donc l'équation s'écrit $(a^2 + t)^2 = (159 + 2t)a^2 - 840a + 588 + t^2$
$\Delta = 840^2 - 4(588 + t^2)(159 + 2t)$. Une programmation sur calculatrice montre que Δ s'annule pour $t = -42$. On reprend l'équation avec $t = -42$.

$(a^2 - 42)^2 = 75a^2 - 840a + 2352$
$(a^2 - 42)^2 = 3(5a - 28)^2$

donc $a^2 - 42 = \sqrt{3}(5a - 28)$ ou $a^2 - 42 = -\sqrt{3}(5a - 28)$
Or pour des considérations d'aire , $7a \leq 30$, donc $a \leq 5$, donc la seule équation possible est la première soit $a^2 - 5\sqrt{3}a + 28\sqrt{3} - 42 = 0$
$\Delta = 243 - 112\sqrt{3}$, donc $a = \dfrac{5\sqrt{3} - \sqrt{243 - 112\sqrt{3}}}{2} \approx 0{,}83$ (l'autre solution est > 5)

exercice 2

1. a. $C(1,2,4) = 7$, $C(1,2,5) = 3$ et $C(1,2,3,4,5) = 15$.
   b. Si $M = C(a_1,\ldots,a_j)$, alors on peut obtenir toutes les nombres de 1 à M avec les termes avec $a_1,\ldots,a_j$.
   Si $a_{j+1} \geq M + 2$, alors on ne peut pas obtenir $M + 1$, donc $C(a_1,\ldots,a_{j+1}) = M$

   Si $a_{j+1} = M + 1$, toutes les sommes de 1 à M sont obtenues avec $a_1,\ldots,a_j$
   $M + 1$ est obtenue avec a_{j+1} et pour $2 \leq k \leq a_{j+1}$, $M + k = (M + k - a_{j+1}) + a_{j+1}$
   donc on obtient toutes les sommes de 1 à $2M + 1$, donc $C(a_1,\ldots,a_{j+1}) = 2M + 1$

   Si $a_{j+1} < M + 1$, pour $1 \leq k \leq a_{j+1}$, $M + k = (M + k - a_{j+1}) + a_{j+1}$, donc on obtient toutes les sommes de 1 à $M + a_{j+1}$, donc $C(a_1,\ldots,a_{j+1}) = M + a_{j+1}$

   donc $C(a_1,\ldots,a_j) \neq C(a_1,\ldots,a_{j+1}) \Leftrightarrow a_{j+1} \leq M + 1$

   Le maximum sera atteint avec $a_{j+1} = M + 1$, auquel cas $C(a_1,\ldots,a_{j+1}) = 2M + 1$

   c. D'après la question précédente,
   si $a_n \geq C(a_1,\ldots,a_{n-1}) + 2$, alors $C(a_1,\ldots,a_n) = C(a_1,\ldots,a_{n-1})$
   sinon $C(a_1,\ldots,a_n) = C(a_1,\ldots,a_{n-1}) + a_n$

1	1	1	1	
2 (2 – 1 < 1)	3 (1 + 2)	2	3	
4 (4 – 3 < 1)	7 (4 + 3)	5	3	reste inchangé car 5 – 3 ≥ 2

d. Montrons que la capacité maximale pour n pièces est $C(1,2,2^2,\dots,2^{n-1})$ avec $n \geq 1$

Montrons par récurrence que $C(1,2,2^2,\dots,2^{n-1}) = 2^n - 1$

P(1) est vraie car $C(1) = 2^1 - 1$

Supposons P(n) vraie : $C(1,\dots,2^{n-1}) = 2^n - 1$

alors $C(1,\dots,2^n) = C(1,\dots,2^{n-1}) + 2^n = 2 \times 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$ et P(n+1) est vraie

Montrons par récurrence que pour tout naturel n non nul, $C(a_1,\dots,a_n) \leq 2^n - 1$, quel que soit $(a_1,\dots,a_n)$.

P(1) est vraie car $C(1) \leq 2^1 - 1$

Supposons P(n) vraie, $C(a_1,\dots,a_n) \leq 2^n - 1$, pour tout n-uplet $(a_1,\dots,a_n)$

soit $(b_1,\dots,b_{n+1})$ un n+1-uplet, alors d'après la question 1b) ,

$C(b_1,\dots,b_{n+1}) \leq 2C(b_1,\dots,b_n) + 1 \leq 2(2^n - 1) + 1 \leq 2^{n+1} - 1$

et P(n+1) est vraie.

2 La meilleure distribution semble être:

pour le vendeur : $(1,2,\dots,2^{p-1})$ avec une capacité de rendu de $2^p - 1$

pour l'acheteur : $(2^p,2^{p+1},\dots,2^{p+n-1}) = (2^p \times 1 , 2^p \times 2 ,\dots, 2^p \times 2^{n-1})$

$C(1,\dots,2^{n-1}) = 2^n - 1$, donc l'acheteur va pouvoir donner toutes les sommes de la forme $2^p \times K$, avec K entier tel que : $1 \leq K \leq 2^n - 1$.

Soit $2^p(K - 1)$ et $2^p \times K$, deux sommes consécutives payables par l'acheteur avec $K > 1$

Si la somme est $2^p \times K - 1$, le vendeur rendra 1

Si la somme est $2^p \times K - 2$, le vendeur rendra 2

Si la somme est $2^p \times (K - 1) + 1 = 2^p \times K - (2^p - 1)$, le vendeur rendra $2^p - 1$

Donc le vendeur pourra rendre la monnaie sur toute somme payable par l'acheteur

La capacité commune est donc $2^p \times (2^n - 1)$

Montrons que c'est la meilleure.

Soit $(v_1,\dots,v_p)$ de capacité M et considérons la distribution $(M+1 , 2(M+1) ,\dots, 2^{n-1}(M+1))$ pour l'acheteur et notons C_M la capacité commune.

$C_M(M+1 , 2(M+1) ,\dots, 2^{n-1}(M+1)) = (M + 1)(2^n - 1)$ par un calcul analogue à ce qui précède.

Pour une autre distribution $(a_1 , \dots , a_n)$,

$C_M(a_1,\dots,a_n) = C_M(a_1,\dots,a_{n-1})$ si $a_n \geq C_M(a_1, \dots,a_{n-1}) + M + 2$

$\qquad = C_M(a_1,\dots,a_{n-1}) + a_n$ sinon

On montre par récurrence sur n : « $\forall (a_1,\dots,a_n) , C_M(a_1,\dots,a_n) \leq (M + 1)(2^n - 1)$ »

P(1) est vraie , car $C_M(a_1) \leq M + 1 , \forall a_1$

Si P(n) est vraie , soit $(b_1,\dots,b_n,b_{n+1})$,

$C_M(b_1,\dots,b_{n+1}) \leq C_M(b_1,\dots,b_n) + M + 1 \leq (M + 1)(2^n - 1) + (M + 1) \leq (M + 1)(2^n)$

et $2^n \leq 1 + 2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, et P(n+1) est vraie

Soit donc $(v_1,\dots,v_p)$ et $(a_1,\dots,a_n)$ deux distributions quelconques

On pose $M = C(v_1,\dots,v_p) \leq 2^p - 1$

$C_M(a_1,\dots,a_n) \leq C_M(M+1,\dots,(M+1)2^{n-1}) = (M+1)(2^n - 1) \leq 2^p(2^n - 1)$

exercice 3

1) On note E = $\{z^2 \,/\, z \in U_{2n}\}$

Soit Z $\in$ E, alors $Z = z^2 = \left(e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\right)^2 = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ $avec\ \ 0 \le k \le 2n-1\ \ si\ \ k \ge n, Z = e^{\frac{2i(k-n)\pi}{n}}$

donc Z $\in$ U_n et E $\subset$ U_n.

Réciproquement si Z $\in$ U_n , $Z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \left(e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\right)^2$ avec 0 ≤ k ≤ n – 1 ≤ 2n – 1

donc Z $\in$ E , et $U_n \subset E$

Donc E = U_n.

Soit Z $\in$ U_n , $Z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2i(2k)\pi}{2n}}$, avec 0 ≤ k ≤ n – 1, donc 0 ≤ 2k ≤ 2n – 2 ≤ 2n – 1
donc Z $\in$ U_{2n}, donc $U_n \subset U_{2n}$.

2) a) $f(z^2) = f(f \circ f(z)) = f \circ f(f(z)) = (f(z))^2$
b) $f(z) = f(z') \Rightarrow f(f(z)) = f(f(z')) \Rightarrow z^2 = z'^2 \Rightarrow z = \pm z'$
$f(1) = f(1^2) = (f(1))^2$, donc f(1) = 0 ou f(1) = 1 , mais f(1) $\in$ U_{2n}, donc f(1) = 1

$1 = f(1) = f((-1)^2) = (f(-1))^2$, donc f(-1) = 1 ou f(-1) = - 1
Supposons que f(-1) = -1 , alors f(f(-1)) = f(-1) , donc 1 = f(-1) contradictoire
donc f(-1) = 1

3) si n est pair , n = 2k , soit $z = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{k\pi}{2k}} = e^{i\frac{k\pi}{n}} = e^{\frac{2ik\pi}{2n}}$ et k ≤ n ≤ 2n – 1 ,
donc z $\in$ U_{2n} et $z^2 = i^2 = -1$

réciproquement s'il existe z $\in$ U_{2n} tel que $z^2 = -1$
$z = e^{\frac{2ik\pi}{2n}}$ $donc\ \ z^2 = e^{i\frac{2ik\pi}{n}} = e^{i\pi}$ avec 0 ≤ k ≤ 2n – 1
$\frac{2k\pi}{n} = \pi + 2k'\pi$, d'où n(1 + 2k') = 2k , donc n est pair .

Soit donc n pair, et z $\in$ U_{2n} tel que $z^2 = -1$. Supposons qu'il existe une fonction f solution , alors $f(z^2) = (f(z))^2$, donc $(f(z))^2 = f(-1) = 1$
donc f(z) = 1 ou f(z) = - 1
Si f(z) = 1 = f(1) , alors z = ± 1 , contradictoire avec $z^2 = -1$
Si f(z) = - 1 , $z^2 = f(f(z)) = f(-1) = 1$, contradictoire
donc il n' y a pas de solution f.

4) Si n = 3k , soit $z = e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2i(2k)\pi}{2n}}$,
alors $z \in U_{2n}$, car on peut vérifier que $0 \leq k \leq 2n - 1$
et $z^3 = 1$

réciproquement si $z^3 = 1$ avec $z \neq 1$ et $z \in U_{2n}$
alors $z = e^{\frac{2ik\pi}{2n}} = e^{\frac{ik\pi}{n}}$ *donc* $z^3 = e^{\frac{i3k\pi}{n}} = 1 = e^{0i\pi}$
donc $\frac{3k}{n} = 2k'$, mais $0 < k \leq 2n - 1$ ($k \neq 0$ car $z \neq 1$) , donc $0 < \frac{k}{n} < 2$,
donc $0 < k' < 3$, donc $k' = 1$ ou $k' = 2$
Si $k' = 1$, $3k = 2n$, donc k est pair = 2K, et n = 3K
Si $k' = 2$, $3k = 4n$, donc k = 2K , donc 3K = 2n , puis n = 3K'

Soit n = 3k et $z \neq 1$ tel que $z^3 = 1$ alors $z \in U_3 \setminus \{1\} = \left\{ e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}} \right\}$

Supposons qu'il existe f solution
$z^4 = z$, donc $f(z^4) = f(z)$, donc $f(z^2)^2 = f(z)$, puis $f(z)^4 = f(z)$
$f(z) \in U_{2n}$, donc $f(z) \neq 0$, donc $f(z)^3 = 1$, donc d'après U_3, $f(z) = z$ ou $f(z) = z^2$
si $f(z) = z$, alors $f(f(z)) = f(z)$, donc $z^2 = z$, donc $z = 0$ car $z \neq 1$, impossible car $z^3 = 1$
si $f(z) = z^2 = f(f(z))$, alors $f(z) = z$ impossible
ou $f(z) = - z$, soit $z^2 = - z$, donc $z = 0$ ou $z = - 1$, impossible

5) a) U_n est un ensemble fini à n éléments (n impair)
Montrons que si $z \neq z'$, alors $g(z) \neq f(z')$ par la contraposée.
Soient z et $z' \in U_n$ tel que $g(z) = g(z')$, donc tel que $z^2 = z'^2$
alors $z = z'$ ou $z = - z'$
Mais z et $z' \in U_n$, donc $z^n = 1$ et $(-1z')^n = - 1$ (n impair) , donc $z = - z'$ est impossible
donc $z = z'$

Les n éléments de U_n ont pour image n éléments tous 2 à 2 distincts, donc tout élément de U_n admet un antécédent unique par g, donc g est bijective.

b) Soit $\varphi = g^{-1} \circ f \circ g$, φ est bien une fonction de U_n dans U_n
En effet , si $z \in U_n$, $g(z) = z^2 \in U_n$, et $f(z^2) = f(z)^2 \in U_n$ d'après la question 1)
$\varphi \circ \varphi = g^{-1} \circ f \circ g \circ g^{-1} \circ f \circ g = g^{-1} \circ f \circ f \circ g$
Soit $z \in U_n$, $g(z) = z^2 \in U_n$, et $f \circ f \circ g(z) = f(f(z^2)) = z^4$ et $g^{-1}(z^4) = z^2$ car $z^2 \in U_n$
donc $\varphi \circ \varphi (z) = z^2$ pour tout $z \in U_n$, donc $\varphi \circ \varphi = g$

c) On définit f par $f(z) = \varphi(g^{-1}(z^2))$ pour tout $z \in U_{2n}$,
f est une fonction de U_{2n} dans $U_n \subset U_{2n}$
$z^2 \in U_n$, $g^{-1}(z^2) = z' \in U_n$ avec $z'^2 = z^2$ (avec $z = z'$ si $z \in U_n$)
$f(z) = \varphi(z') \in U_n$, donc $g^{-1}((f(z))^2) = f(z)$
donc $f(f(z)) = \varphi(g^{-1}((f(z)^2) = \varphi(f(z)) = \varphi \circ \varphi (z') = g(z') = z'^2 = z^2$

d) il suffit de trouver une fonction φ de U_5 dans U_5 , telle que $\varphi \circ \varphi = g$

On note $u_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}, k \in \{0,1,2,3,4\}$, en particulier $u_0 = 1$

On cherche une application φ de U_5 dans U_5, telle que $\varphi \circ \varphi = g$.

$g(u_0) = u_0$, donc $\varphi \circ \varphi\ (u_0) = u_0$ (1)

$g(u_1) = u_2$, donc $\varphi \circ \varphi\ (u_1) = u_2$ (2)

$g(u_2) = u_4$, donc $\varphi \circ \varphi\ (u_2) = u_4$ (3)

$g(u_3) = u_1$, donc $\varphi \circ \varphi\ (u_3) = u_1$ (4)

$g(u_4) = u_3$, donc $\varphi \circ \varphi\ (u_4) = u_3$ (5)

Si $\varphi(u_0) = u_1$, alors $\varphi \circ \varphi(u_0) = \varphi(u_1)$, donc $\varphi(u_1) = u_0$, et $\varphi \circ \varphi(u_1) = \varphi(u_0) = u_1$.

Donc $\varphi(u_0) \neq u_1$. De même avec les autres u_i, donc $\varphi(u_0) = u_0$.

Pour $i \neq 0$, $\varphi(u_i) = u_i$ est impossible car alors $\varphi \circ \varphi(u_i) = u_i$

$\varphi(u_1) = u_2$ donne $\varphi \circ \varphi(u_1) = \varphi(u_2) \neq u_2$, donc $\varphi(u_1) \neq u_2$

donc $\varphi(u_1) = u_3$ ou u_4

Si $\varphi(u_1) = u_3$, alors (2) impose $\varphi(u_3) = u_2$

Si $\varphi(u_3) = u_2$, alors (4) impose $\varphi(u_2) = u_1$

Si $\varphi(u_2) = u_1$, alors (3) impose $\varphi(u_1) = u_4$, donc $u_3 = u_4$ contradiction

De même $\varphi(u_1) = u_4$ aboutit à une contradiction, donc φ n'existe pas, de même que f.

e) Si n = 9 = 3k, on a vu précédemment que f n'existe pas.

si n = 7 , on note $u_k = e^{\frac{2ik\pi}{7}}, k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$

$g(u_0) = u_0$

$g(u_1) = u_2$

$g(u_2) = u_4$

$g(u_3) = u_6$

$g(u_4) = u_1$

$g(u_5) = u_3$

$g(u_6) = u_5$

Il suffit de définir φ par $\varphi(u_0) = u_0$

$\varphi(u_1) = u_4$

$\varphi(u_2) = u_1$

$\varphi(u_3) = u_5$

$\varphi(u_4) = u_2$

$\varphi(u_5) = u_6$

$\varphi(u_6) = u_3$

On vérifie que $\varphi \circ \varphi = g$, puis on définit f(z) sur U_{14} par $f(z) = \varphi(g^{-1}(z^2))$