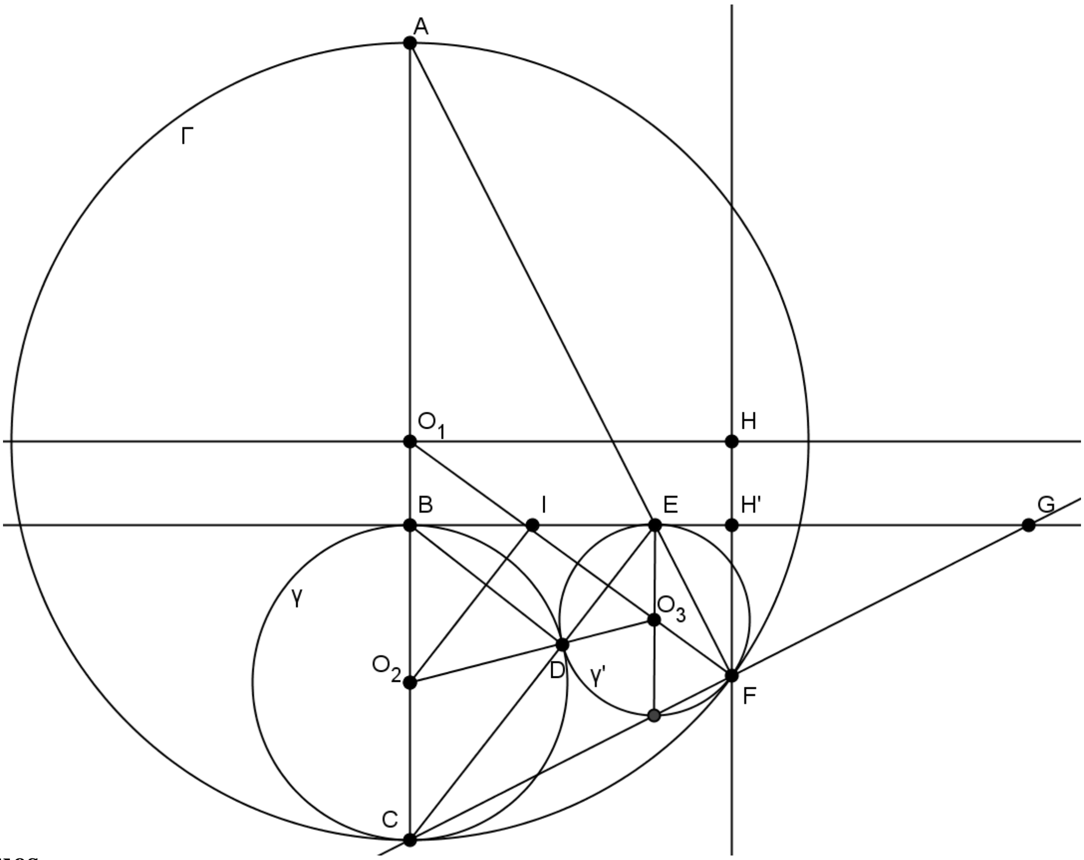
Exercice 1 (construction dans le fichier geogebra joint : appuyer sur les flèches pour avancer pas à pas la construction et déplacer le point B à la fin de la construction)



.

Remarques

O_1,O_2 ,C sont alignés ; O_1,O_3 ,F sont alignés et O_2,D,O_3 sont alignés

(BC) et (EO_3) sont parallèles entre elles car perpendiculaires à Δ = (BE)

Une homothétie est caractérisée par son centre et son rapport

Par une homothétie, l'image d'une droite est une droite parallèle

Une droite est globalement invariante par une homothétie $\Leftrightarrow$ elle passe par le centre de l'homothétie

Si $kk' \neq 1$, la composée d'une homothétie de rapport k et d'une homothétie de rapport k' est une homothétie de rapport kk'

---

1. Soit H le projeté orthogonal de F sur la perpendiculaire à (AC) passant par O_1.
   (FH) coupe (BE) en H' . $FH < FO_1 = O_1C$, donc $FH' < BC$,
   donc BH'FC est un trapèze non parallélogramme et Δ et (CF) sont sécantes.

remarque : de la même manière, on peut montrer que $R_3 < R_2$, donc $R_3 < R_2 < R_1$

2.**Soit h l'homothétie de centre C qui transforme B en A**. Son rapport est $\frac{AC}{BC} = \frac{R_1}{R_2}$

L'image par h du cercle de diamètre [BC] est le cercle de diamètre [AC] , donc l'image de γ est Γ.

Soit h' l'homothétie de centre F qui transforme O_1 en O_3. Son rapport est $\frac{O_3F}{O_1F} = \frac{R_3}{R_1}$

L'image par h' du cercle de centre O_1 passant par F est le cercle de centre O_3 passant par F, donc l'image de Γ est γ '

---

3. Le rapport des rayons des deux cercles est $\frac{R_3}{R_2} \neq 1$, donc les deux rapports possibles des homothéties cherchées sont $\frac{R_3}{R_2}$ ou $-\frac{R_3}{R_2}$. **Il n'y a donc que deux possibilités :**

i) O_2 a pour image O_3 et le rapport de l'homothétie est $-\dfrac{R_3}{R_2}$

$\overrightarrow{\Omega O_3} = -\dfrac{R_3}{R_2}\overrightarrow{\Omega O_2} \Leftrightarrow \Omega$ est le barycentre de $\{(O_3,R_2)\ (O_2,R_3)\} \Leftrightarrow\ \Omega = D$

L'homothétie de centre D et de rapport $-\dfrac{R_3}{R_2}$ est donc l'unique homothétie de rapport $-\dfrac{R_3}{R_2}$ qui transforme O_2 en O_3. On vérifie qu'elle transforme γ en γ'.

ii) O_2 a pour image O_3 et le rapport de l'homothétie est $\dfrac{R_3}{R_2}$,

De même il existe une unique homothétie de rapport $\dfrac{R_3}{R_2}$ qui transforme O_2 en O_3.

Or $\dfrac{R_1}{R_2} \times \dfrac{R_3}{R_1} = \dfrac{R_3}{R_2} \neq 1$, donc h' o h (h et h' homothéties de la question 2) est une homothétie de rapport $\dfrac{R_3}{R_2}$, et qui transforme γ en γ' (il suffit d'appliquer h puis h') , donc O_2 en O_3

h' o h est donc l'unique homothétie de rapport $\dfrac{R_3}{R_2}$ qui transforme γ en γ'.

Le centre de h est C , donc la droite (CF) est globalement invariante par h .
Le centre de h' est F, donc (CF) est invariante par h' , donc (CF) est invariante par h' o h , donc elle contient le centre de h' o h .
L'image de B est l'une des intersections de la parallèle à (BO_2) passant par O_3 et de γ'.
C'est E car le rapport de l'homothétie est positif , donc (BE) contient le centre de l'homothétie.
Le centre de h' o h est donc l'intersection de (CF) et (BE), c'est le point G .
remarque . On en déduit de plus que O_2 , D , O_3 et G sont alignés.

---

4. **C,D et E sont alignés** car E est l'image de C par l'homothétie de centre D et de rapport $-\dfrac{R_3}{R_2}$

Par l'homothétie h' , l'image de A est E , donc A,E et F sont alignés.
F appartient au cercle de diamètre [AC] , donc (AF) est perpendiculaire à (CF) = (CG)

Dans le triangle AGC , on connaît donc 2 hauteurs (AF) et (BG) , qui se coupent en E.
(CE) est la troisième hauteur , elle est perpendiculaire à (AG).
I est le milieu de [BE] et O_2 de [BC] , donc (IO_2) // (EC) , donc (IO_2) est perpendiculaire à (AG) .
Dans le triangle AGO_2 , on a donc 2 hauteurs (IO_2) et (BG) qui se coupent en I
La troisième hauteur est donc (AI) , elle est perpendiculaire à (O_2O_3) donc à (GD)

(O_2I) est parallèle à (CD) déjà vu et (CD) est perpendiculaire à (BD) , car D appartient au cercle de diamètre [BC] , donc (O_2I) est perpendiculaire à (BD) et comme O_2 est équidistant de B et D ,

(O_2I) est la médiatrice de [BD] , donc par symétrie par rapport à (IO_2) , $\widehat{O_2DI} = \widehat{O_2BI} = 90°$,
donc (ID) est perpendiculaire à (O_3D) = (O_2O_3)
donc (AI) et (ID) perpendiculaires à (O_2O_3) sont confondues

---

5. $\widehat{AIB} = \widehat{DIG}$ (angles opposés par le sommet) , $\widehat{ABG} = \widehat{IDG} = 90°$ donc ils sont semblables avec un côté égal IB = ID , donc ils sont isométriques, donc AB = GD

---

6. Soit R_1 , R_2 et R_3 les rayons des cercles de centre O_1 , O_2 et O_3 .

γ' est l'image de γ par l'homothétie de centre G de rapport $\dfrac{R_3}{R_2}$, donc $\dfrac{R_3}{R_2} = \dfrac{GO_3}{GO_2} = \dfrac{GD - R_3}{GD + R_2}$

Or GD = AB = $2R_1 - 2R_2$, donc $\dfrac{R_3}{R_2} = \dfrac{2R_1 - 2R_2 - R_3}{2R_1 - R_2} \overset{(*)}{=} \dfrac{2R_1 - 2R_2}{2R_1} = 1 - \dfrac{R_2}{R_1}$

donc $R_3 = R_2(1 - \dfrac{R_2}{R_1})$ soit avec les notations de l'énoncé $\mathbf{r' = r\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)}$

(*) propriété de proportionnalité : si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+c}{b+d}$

Exercice 2
1. avec n = 3 points , un seul triangle ABC donc **t(3) = 1**
avec n = 4 points A,B,C et D
on peut construire 4 triangles ABC , ABD , ACD et BCD et on vérifie que 2 triangles quelconques ont deux sommets en commun donc **t(4) = 4**

Avec n = 5 points A , B , C , D , E
Avec 5 sommets, on peut construire 10 triangles
ABC ABD ABE ACD ACE ADE BCD BCE BDE CDE
Parmi les t(5) triangles construits , 2 quelconques ont 2 sommets en commun (il n'y a que 5 sommets)
Par exemple ABC et ABD .
La construction de ces deux triangles élimine les triangles ACE , BCE , BDE et CDE
Il reste ABC ABD ABE ACD et BCD
Si on choisit ABC , ABD et ABE , on doit éliminer ACD et BCD
Si on ne construit pas ABE , on peut construire ABC , ABD , ACD et BCD .
En conclusion le plus grand nombre de triangles que l'on puisse construire avec 5 points est 4
donc **t(5) = 4** .

Avec n = 6 points A , B , C , D , E , F , en procédant de même , on obtient **t(6) = 4**
Par exemple ABC , ABD , ABE et ABF

Pour comprendre la démonstration générale, on peut calculer t(7)
On a 7 sommets X_1 X_2 …….. X_7
Soit tous les triangles construits sont disjoints et on ne peut construire que deux triangles par exemple $X_1 X_2 X_3$ et $X_4 X_5 X_6$

Soit 2 triangles au moins ont 2 sommets en commun par exemple $X_1 X_2 X_3$ et $X_1 X_2 X_4$
On construit 4 groupes de triangles

groupe 1 : $X_1 X_2 X_3$ et $X_1 X_2 X_4$
groupe 2 : $X_1 X_3 X_4$ et $X_2 X_3 X_4$
groupe 3 : $X_1 X_2 X_5$ et $X_1 X_2 X_6$ et $X_1 X_2 X_7$
groupe 4 : $X_5 X_6 X_7$ il y a t(3) = 1 triangles constructibles

On part des deux triangles du groupe 1
Si on prend un triangle du groupe 2 , cela élimine les 3 triangles du groupe 3 , donc autant prendre les deux triangles du groupe 2 , puis le triangle du groupe 4 , ce qui donne en tout 2 + 2 + 1 = 5 triangles
Si on prend un triangle du groupe 3 , cela élimine tous les triangles du groupe 2 et le triangle du groupe 4 , donc autant prendre tous les triangles du groupe 3 et on obtient 2 + 3 = 5 triangles
Le maximum de triangles obtenu est 5 , donc t(7) = 5

---

2. Pour simplifier la récurrence, on peut poser t(0) = t(1) = t(2) = 0
Soit P(n) la propriété : $\{-2 \le t(0) \le 0 , -1 \le t(1) \le 1 , \ldots\ldots. , n-3 \le t(n-1) \le n-1\}$. P(7) est vraie
Supposons que pour un certain entier $n \ge 7$, P(n) soit vraie
Soient X_1 , X_2 ,……. , X_n n sommets ,

Ou bien (1) : On ne construit que des triangles disjoints. On ne peut en construire que $E\left(\frac{n}{3}\right) \le \frac{n}{3} \le n-2$

Ou bien (2), pour n sommets X_1 , ….. , X_n avec $n \ge 7$, on part de 2 triangles ayant 2 sommets en commun X_1 et X_2 , $X_1 X_2 X_3$ et $X_1 X_2 X_4$
On peut constituer 4 groupes de triangles : G2 et G3 regroupent tous les triangles ayant 2 sommets en commun avec les triangles de G1 et G4 regroupe les triangles constructibles n'ayant aucun point en commun avec les triangles de G1
Groupe 1 : $X_1 X_2 X_3$ et $X_1 X_2 X_4$
Groupe 2 : $X_1 X_3 X_4$ et $X_2 X_3 X_4$
Groupe 3 : $X_1 X_2 X_5$, $X_1 X_2 X_6$, ……… , $X_1 X_2 X_n$
Groupe 4 : triangles constructibles avec les n – 4 points X_5 , X_6 , ……. , X_n

Pour construire des triangles répondant à la règle , on part des deux triangles du groupe 1
Soit (2 a) on choisit les triangles du groupe 2 , ce qui élimine tous les triangles du groupe 3 et on utilise tous les triangles du groupe 4 , ce qui donne 2 (groupe 1) + 2 (groupe 2) + $t(n-4)$ (groupe 4) , donc on obtient exactement $4 + t(n-4)$ triangles .
et on a l'encadrement $n-6 \leq t(n-4) \leq n-4$, donc $\mathbf{n-2 \leq 4 + t(n-4) \leq n}$

Soit (2 b) on ne choisit pas les triangles du groupe 2 , mais ceux du groupe 3
Si on choisit k ($1 \leq k \leq n-4$) triangles du groupe 3 , on doit éliminer k sommets du groupe 4 , et il restera la possibilité de construire $t(n-4-k)$ triangles du groupe 4
ce qui donnera $2 + k + t(n-4-k)$ triangles constructibles avec n sommets
mais $\mathbf{2 + k + t(n-4-k) \leq 2 + k + n - 4 - k = n - 2}$

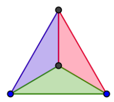
C'est le choix (2 a) qui donne le plus de triangles , donc $n-2 \leq t(n) \leq n$
donc P(n+1) est vraie et pour tout n , $t(n) \leq n$

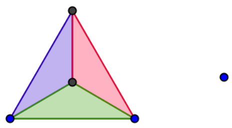
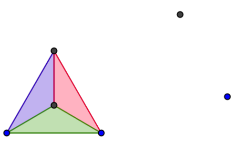
De plus $\mathbf{t(n) = 4 + t(n-4)}$, ce qui permet de montrer par récurrence que
pour tout entier $k \geq 1$, P(k) = "$\mathbf{t(4k) = 4k \text{ , } t(4k+1) = 4k \text{ , } t(4k+2) = 4k \text{ , } t(4k+3) = 4k+1}$" est vraie

P(1) = "$t(4) = 4$, $t(5) = 4$, $t(6) = 4$, $t(7) = 5$" est vraie
Supposons P(k) vraie pour un certain entier $k \geq 1$
$t(4(k+1)) = t(4k+4) = t(4k) + 4 = 4k + 4 = 4(k+1)$
$t(4(k+1)+1) = t(4k+1+4) = t(4k+1) + 4 = 4k + 4 = 4(k+1)$
de même $t(4(k+1)+2) = 4(k+1)$ et $t(4(k+1)+3) = 4(k+1) + 1$
et la propriété est vraie au rang k + 1

Par exemple $t(4001) = t(4 \times 1000 + 1) = 4 \times 1000 = 4000$

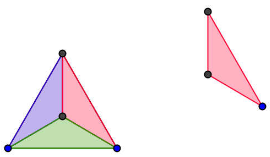
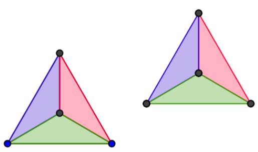
3.

<table>
<tr><td></td><td rowspan="2">Avec 4 sommets , on obtient 3 triangles qui ne se recoupent pas , à condition d'avoir cette configuration de base , donc $u(4) = 3$

Avec 5 sommets ABCDE , 2 triangles ont forcément 2 sommets en commun. Par exemple ABC et ABD ce qui élimine ABE à cause de la règle de non chevauchement et tous les triangles avec un seul sommet en commun , c'est-à-dire tous les triangles xyE. Il reste BCD et ACD comme dans le cas précédent et le choix de l'un élimine l'autre , donc $u(5) = 3$</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="3">$u(6) = 4$ même type de raisonnement

$u(7) = 5$

Avec 8 sommets ABCDEFGH
Soit tous les triangles sont disjoints , ABC , DEF ce qui donne 2 triangles
Soit , on part de 2 triangles avec 2 sommets en commun ABC et ABD , ce qui élimine tous les triangles de type ABx . Les seuls autres triangles avec 2 sommets en commun avec ABC et ABD , sont BCD et ACD. Le choix de l'un élimine l'autre car $u(4) = 3$.

On peut construire $u(4) = 3$ triangles sans sommets commun avec ABCD , avec les 4 sommets EFGH , donc $u(8) = 3 + 3 = 6$</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

4. **Soit P(n) = "$\frac{4}{3}$ < u(4), ……….. , $\frac{n-1}{3}$ < u(n–1)" P(9) est vraie.**

Supposons que pour un certain entier $n \geq 9$, P(n) soit vraie. On considère n sommets X_1 , ….. , X_n .

Ou bien tous les triangles sont disjoints et il y a moins de $\frac{n}{3}$ triangles

Ou bien , il y a 2 triangles avec deux sommets en commun, par exemple $X_1 X_2 X_3$ $X_1 X_2 X_4$
On ne peut construire d'autres triangles avec 2 sommets en commun avec l'un de ces 2 triangles sauf $X_2 X_3 X_4$ ($X_1 X_3 X_4$ et $X_1 X_2 X_k$ $k \geq 5$ impossibles à cause de la règle de non-chevauchement)
Il reste les u(n – 4) triangles constructibles avec les sommets X_5 , X_6 , ….. , X_n
Avec cette méthode , on peut construire 3 + u(n – 4) triangles

Or $\frac{n-4}{3} < u(n-4)$, donc $\frac{n}{3} < \frac{n-4}{3} + 3 \leq 3 + u(n-4)$ et P(n+1) est vraie

On a de plus montré que u(n) = u(n – 4) + 3.
C'est cette formule qui permet de montrer par récurrence comme dans 2) que pour tout entier $k \geq 1$
u(4k) = u(4k + 1) = u(4k + 2) = 3k et u(4k + 3) = 3k + 1
Par exemple u(4001) = u(4 × 1000 + 1) = 3 × 1000 = 3000

Exercice 3

1. a. la probabilité qu'il n'y ait pas compatibilité est 6abc (pour les 6 cas ABC, ACB, BAC, BCA,CAB, CBA) donc la probabilité qu'il y ait compatibilité est **p = 1 – 6abc**

1. b. **minorer p revient à majorer abc**
abc = a(1 – a – c)c = ac – a²c – ac²
Soit c un réel donné ∈ [0;1]. On pose f(x) = cx – cx² – c²x de dérivée f '(x) = – 2cx + c – c²

x	0	$\frac{1-c}{2}$	1
f '(x)	+	0	–
f(x)	0 ↗	$f(\frac{1-c}{2})$	↘ – c²

donc $abc = f(a) \leq f\left(\frac{1-c}{2}\right) = c\left(\frac{1-c}{2}\right) - c\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - c^2\left(\frac{1-c}{2}\right) = \frac{c^3 - 2c^2 + c}{4}$

Soit $g(x) = x^3 - 2x^2 + x$ de dérivée $g'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 3(x - \frac{1}{3})(x-1)$ (avec Δ)

x	0	$\frac{1}{3}$	1
g '(x)	+	0	–
g(x)	0 ↗	$\frac{4}{27}$	↘ 0

donc $g(c) \leq \frac{4}{27}$, donc $f\left(\frac{1-c}{2}\right) = \frac{g(c)}{4} \leq \frac{1}{27}$ et **donc $abc = f(a) \leq f\left(\frac{1-c}{2}\right) \leq \frac{1}{27}$** , donc $6\,abc \leq \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$,

donc $1 - 6abc \geq 1 - \frac{2}{9}$, ce qui donne finalement **$p \geq \frac{7}{9}$**

---

2. a. Les cas où la descendance est A et les parents compatibles se produit lorsque les parents sont :
AAA , AAB , ABA , BAA , AAC , ACA , CAA ce qui donne pour probabilité
$a_n^3 + 3a_n^2b_n + 3a_n^2c_n = a_n^2(a_n + 3b_n + 3c_n)$ et avec $b_n + c_n = 1 - a_n$
$= a_n^2(a_n + 3(1 - a_n)) = a_n^2(3 - 2a_n)$

La probabilité que la descendance soit de type A sachant que les 3 parents sont compatibles est donc

$$\mathbf{a_{n+1} = \frac{P(\text{descendance est A} \cap \text{parents compatibles})}{P(\text{parents compatibles})} = \frac{a_n^2(3-2a_n)}{1-6a_nb_nc_n}}$$

De même pour b_{n+1} et c_{n+1} .

2. b. Soit $f(x) = x^2(3-2x) = 3x^2 - 2x^3$ de dérivée $f'(x) = 6x - 6x^2 = 6x(1-x)$

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

Soit P(n) " $0 < c_n < b_n < a_n < 1$ " pour n entier naturel

P(0) est vraie par hypothèse

Supposons que pour un certain entier naturel n , P(n) soit vraie

$0 < c_n < b_n < a_n < 1$, donc f étant croissante sur [0;1] , $0 < f(c_n) < f(b_n) < f(a_n) < 1$

donc en divisant par $1 - 6a_nb_nc_n$, on obtient $0 < c_{n+1} < b_{n+1} < a_{n+1}$ et $a_{n+1} < 1$ par définition de a_{n+1}

On a montré par récurrence que pour tout naturel n , $0 < c_n < b_n < a_n < 1$

donc pour tout n , $a_n + b_n + c_n > 3c_n$, donc $3c_n < 1$ et $\mathbf{c_n < \frac{1}{3}}$

et $a_n + b_n + c_n < 3a_n$, donc $1 < 3a_n$ et $\mathbf{a_n > \frac{1}{3}}$

$2b_n < a_n + b_n = 1 - c_n < 1$, donc $\mathbf{b_n < \frac{1}{2}}$

2. c. $$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n^2(3-2a_n)}{1-6a_nb_nc_n} - \frac{b_n^2(3-2b_n)}{1-6a_nb_nc_n} = \frac{3(a_n^2 - b_n^2) - 2(a_n^3 - b_n^3)}{1-6a_nb_nc_n}$$

Or $1 - 6a_nb_nc_n < 1$, donc $\frac{1}{1-6a_nb_nc_n} > 1$

donc $a_{n+1} - b_{n+1} > 3(a_n^2 - b_n^2) - 2(a_n^3 - b_n^3) = 3(a_n - b_n)(a_n + b_n) - 2(a_n - b_n)(a_n^2 + a_nb_n + b_n^2)$

donc $$\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} > 3(a_n + b_n) - 2(a_n^2 + a_nb_n + b_n^2) = 3(a_n + b_n) - 2[(a_n + b_n)^2 - a_nb_n]$$

$$= 3(1 - c_n) - 2[(1 - c_n)^2 - a_nb_n]$$

$$= 1 + c_n - 2c_n^2 + 2a_nb_n$$

or a_n et $b_n > c_n$ donc $2a_nb_n > 2c_n^2$

donc $\mathbf{\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} > 1 + c_n - 2c_n^2 + 2c_n^2 > 1 + c_n > 1}$ **, donc $(a_n - b_n)$ est croissante**

De même $\mathbf{\frac{a_{n+1} - c_{n+1}}{a_n - c_n} > 1 + b_n - 2b_n^2 + 2a_nc_n = 1 + b_n(1 - 2b_n) + 2a_nc_n > 1}$ car $b_n < \frac{1}{2}$

donc la suite $(a_n - c_n)$ est croissante

2. d. On en déduit que la suite $v_n = a_n - b_n + a_n - c_n = 3a_n - 1$ est croissante

donc $a_n = \frac{v_n + 1}{3}$ et (a_n) est croissante

La suite (a_n) est croissante et majorée par 1, donc elle est convergente de limite A

$(a_n - b_n)$ est croissante et majorée par 1 , donc convergente ,

donc (b_n) est convergente car $b_n = (b_n - a_n) + a_n$ de limite B

De même on montre que la suite (c_n) est convergente de limite C

Les relations de récurrence montrent en utilisant $\lim A_n = \lim A_{n+1} = A$ que $$\begin{cases} \mathbf{A = \frac{A^2(3-2A)}{1-6ABC}} \\ \mathbf{B = \frac{B^2(3-2B)}{1-6ABC}} \\ \mathbf{C = \frac{C^2(3-2C)}{1-6ABC}} \end{cases}$$

et la relation $a_n + b_n + c_n = 1$ entraîne $A + B + C = 1$

Supposons $C \neq 0$, alors $C(3 - 2C) = 1 - 6ABC \geq \frac{7}{9}$ d'après 1)b),

d'où après simplification, $18C^2 - 27C + 7 \leq 0$ soit $C \in [\frac{1}{3} ; \frac{7}{6}]$ (avec Δ)

Or pour tout n, $c_n < \frac{1}{3}$, donc $C \leq \frac{1}{3}$, donc $C = \frac{1}{3}$ et $A + B = \frac{2}{3}$

De $c_n \leq b_n \leq a_n$, on déduit que $2\, c_n \leq 2\, b_n \leq a_n + b_n$

donc d'après le théorème des gendarmes $\lim 2\, b_n = \frac{2}{3}$ et $\lim b_n = \frac{1}{3}$, puis $\lim a_n = \frac{1}{3}$

Or la suite $(a_n - b_n)$ est croissante donc pour tout n, $a_n - b_n \geq a_0 - b_0$ et par passage à la limite,

$A - B \geq a_0 - b_0 > 0$, donc on ne peut avoir $A = B = \frac{1}{3}$

On vient de montrer par l'absurde que $C = 0$, donc $A = A^2(3 - 2A)$

$A \neq 0$ donc $1 = A(3 - 2A) \Leftrightarrow 2A^2 - 3A + 1 = 0 \Leftrightarrow A = 1$ ou $A = \frac{1}{2}$

La solution $A = B = \frac{1}{2}$ est impossible car contradictoire avec $A > B$

Il reste donc la solution $A = 1$ et $B = 0$ et on vérifie que $(1,0,0)$ est solution du système

---

3. a. Les cas où la descendance est A et les parents compatibles se produit lorsque les parents sont :
AAA, ABB, BBA, BAB, ACC, CCA, CAC ce qui donne pour probabilité

$$\mathbf{a_{n+1} = \frac{a_n^3 + 3a_n(b_n^2 + c_n^2)}{1 - 6a_nb_nc_n}} \text{ et } \mathbf{b_{n+1} = \frac{b_n^3 + 3b_n(a_n^2 + c_n^2)}{1 - 6a_nb_nc_n}} \; ; \; \mathbf{c_{n+1} = \frac{c_n^3 + 3c_n(a_n^2 + b_n^2)}{1 - 6a_nb_nc_n}}$$

3. b. **On considère la propriété P(n) : "$1 > a_n > b_n > c_n > 0$"**

P(0) est vraie par hypothèse

Supposons P(n) vraie pour un certain entier naturel n

$a_{n+1} - b_{n+1}$ est du signe de $a_n^3 + 3a_nb_n^2 + 3a_nc_n^2 - b_n^3 - 3b_na_n^2 - 3b_nc_n^2$

$= (a_n - b_n)^3 + 3a_nc_n^2 - 3b_nc_n^2$

$= (a_n - b_n)^3 + 3c_n^2(a_n - b_n) > 0$ car $a_n > b_n$

de même $b_{n+1} - c_{n+1}$ est du signe de $(b_n - c_n)^3 + 3a_n^2(b_n - c_n) > 0$ car $b_n > c_n$

donc $a_{n+1} > b_{n+1} > c_{n+1} > 0$ (car a_n, b_n et $c_n > 0$) et $1 > a_{n+1}$ par définition de a_{n+1}

donc P(n+1) est vraie

3. c. $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{c_n^2 + 3a_n^2 + 3b_n^2}{1 - 6a_nb_nc_n}$. Posons $a_n = a$, $b_n = b$ et $c_n = c$, $a + b + c = 1$

majorons le dénominateur

$1 - 6abc = 1 - 6a(1 - a - c)c = 1 - 6ac + 6a^2c + 6ac^2$

Comparons avec $1 - 6c^2 + 12c^3 = 1 - 6c^2 + 6c^3 + 6c^3$

$\mathbf{1 - 6abc - (1 - 6c^2 + 12c^3)} = 6c^2 - 6ac + 6a^2c - 6c^3 + 6ac^2 - 6c^3$

$= 6c(c - a) + 6c(a^2 - c^2) + 6c^2(a - c)$

$= 6c(c - a)[1 - (a + c) - c]$

$\mathbf{= 6c(c - a)(b - c) < 0}$ **car $0 < c < b < a$**

donc $1 - 6a_nb_nc_n \leq 1 - 6c_n^2 + 12c_n^3 = g(c_n)$

minorons le numérateur

$\mathbf{c^2 + 3a^2 + 3b^2 - \left(\frac{3}{2} - 3c + \frac{5}{2}c^2\right)} = 3a^2 + 3b^2 - \left(\frac{3}{2} - 3c + \frac{3}{2}c^2\right)$

$= 3a^2 + 3b^2 - \frac{3}{2}(c - 1)^2$ or $c - 1 = -a - b$

$= 3a^2 + 3b^2 - \frac{3}{2}(a + b)^2 \mathbf{= \frac{3}{2}(a - b)^2 \geq 0}$

donc $c^2 + 3a^2 + 3b^2 \geq \frac{3}{2} - 3c + \frac{5}{2}c^2$

en revenant aux notations $\mathbf{c_n^2 + 3a_n^2 + 3b_n^2 \geq f(c_n)}$

On a montré que $c_n^2 + 3a_n^2 + 3b_n^2 \geq f(c_n) > 0$ (calculer Δ de f)

et $0 < \frac{7}{9} \leq 1 - 6a_nb_nc_n \leq g(c_n)$,

donc $\frac{1}{1 - 6a_nb_nc_n} \geq \frac{1}{g(c_n)}$

donc par produit des inégalités , $\frac{c_n^2 + 3a_n^2 + 3b_n^2}{1 - 6a_nb_nc_n} \geq \frac{f(c_n)}{g(c_n)}$ donc $\mathbf{\frac{c_{n+1}}{c_n} \geq \frac{f(c_n)}{g(c_n)}}$

3. d. **Soit** $\mathbf{\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2f(x)}{2g(x)} = \frac{5x^2 - 6x + 3}{24x^3 - 12x^2 + 2}}$

Etudions $t(x) = 2f(x) - 2g(x)$

$= 5x^2 - 6x + 3 - 24x^3 + 12x^2 - 2 = -24x^3 + 17x^2 - 6x + 1$ sur $[0;1]$

$t'(x) = -72x^2 + 34x - 6$ de discriminant $\Delta < 0$, donc $t'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$

x	0	$\frac{1}{3}$	1
$t'(x)$		$-$	
$t(x)$	1	0	-12

donc pour tout $x \in [0;\frac{1}{3}]$, $t(x) \geq 0$, donc $5x^2 - 6x + 3 \geq 24x^3 - 12x^2 + 2$

donc $24x^3 - 12x^2 + 2$ étant > 0 sur $[0;\frac{1}{3}]$ (dérivée et variation évidente)

On en déduit que sur $[0;\frac{1}{3}]$, $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 1$

Or on sait depuis 2) b) que $1 > a_n > b_n > c_n > 0$ entraîne que $0 < c_n < \frac{1}{3}$

donc $\frac{f(c_n)}{g(c_n)} \geq 1$, **donc** $\mathbf{\frac{c_{n+1}}{c_n} \geq 1}$ **et la suite** $\mathbf{(c_n)}$ **est croissante**

La suite (c_n) est donc croissante et majorée par $\frac{1}{3}$, donc elle est convergente vers $C \neq 0$

(car $c_n \geq c_0 > 0$ entraîne par passage à la limite $C \geq c_0 > 0$)

$C \in [0;\frac{1}{3}]$, donc d'après l'étude de t , $\frac{f(C)}{g(C)} \geq 1$

Mais $\frac{C_{n+1}}{C_n} \geq \frac{f(c_n)}{g(c_n)}$ entraîne par passage à la limite : $1 \geq \frac{f(C)}{g(C)}$ (f et g continues)

donc $\frac{f(C)}{g(C)} = 1$, donc $t(C) = 0$ **, donc** $\mathbf{C = \frac{1}{3}}$.

De $\mathbf{a_n + b_n + c_n = 1}$ **, on déduit que la suite** $\mathbf{(a_n + b_n)}$ **a pour limite** $\mathbf{\frac{2}{3}}$

De $c_n \leq b_n \leq a_n$, on déduit que $2c_n \leq 2b_n \leq a_n + b_n$

donc d'après le théorème des gendarmes $\lim 2b_n = \frac{2}{3}$ et $\lim b_n = \frac{1}{3}$, puis $\lim a_n = \frac{1}{3}$