Questions de programmation

Exercice 1 — Centrale 2006 MP

Un réel $0 < r < 1$ étant fixé, on définit deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{-2(1+r^2)}{r}, \quad B_0 = 0, \quad B_1 = 1$$

et les relations de récurrence suivantes :

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad A_n = \frac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)}A_{n-1} - \frac{2n+1}{2n-5}A_{n-2},$$
$$B_n = \frac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)}B_{n-1} - \frac{2n+1}{2n-5}B_{n-2}$$

ainsi qu'une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de deux réels a_0 et a_1 et la relation de récurrence suivante :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad r(2n+3)a_{n+1} - 2n(1+r^2)a_n + r(2n-3)a_{n-1} = 0.$$

On suppose connues des variables globales contenant les valeurs r, a_0 et a_1. Écrire des procédures d'argument $n \in \mathbb{N}$ qui retournent les valeurs de a_n, A_n et B_n.

Exercice 2 — CCP 2006 MP

Un espace euclidien E de dimension 3 est rapporté à une base orthonormée $\mathscr{B}$. Le **déterminant de Gram** d'un triplet de vecteur est défini par

$$\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \operatorname{Det}\big(\langle x_i \,|\, x_j \rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}.$$

Le volume du parallélipipède formé sur quatre points A, B, C et D est égal à

$$\sqrt{\left|\Gamma(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD})\right|}$$

et il est nul si, et seulement si, les quatre points A, B, C et D sont coplanaires.

1. Écrire une procédure `volume`, prenant en arguments les les coordonnées relatives à $\mathscr{B}$ des quatre points A, B, C et D (écrites sous forme de listes) et retournant le volume du parallélipipède.

☞ *Utiliser* `linalg[det]`.

2. En déduire une procédure `siCoplanaires`, prenant en argument les coordonnées relatives à $\mathscr{B}$ des quatre points A, B, C et D et retournant un booléen égal à *true* si, et seulement si, les quatres points sont coplanaires.

Exercice 3 — CCP 2006 TSI

On considère une famille réelle $(u_{k,q})_{0\leqslant k\leqslant n+1, q\in\mathbb{N}}$ qui vérifie les conditions aux limites suivantes :

$$\forall\, q \in \mathbb{N}, \quad u_{0,q} = 20 \quad \text{et} \quad u_{n+1,q} = 100,$$
$$u_{n+1,0} = 100 \quad \text{et} \quad \forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad u_{k,0} = 20$$

ainsi que la relation de récurrence :

$$\forall\, q \in \mathbb{N},\ \forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad u_{k,q+1} = \frac{u_{k-1,q} + u_{k+1,q}}{2}.$$

1. Déterminer $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall\, q \in \mathbb{N}, \quad \begin{bmatrix} u_{1,q+1} \\ \vdots \\ u_{n,q+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_{1,q} \\ \vdots \\ u_{n,q} \end{bmatrix} + B.$$

2. Écrire une procédure d'argument $q \in \mathbb{N}$ qui retourne sous forme d'une liste les valeurs $(u_{k,q})_{1\leqslant k\leqslant n}$.

Exercice 4 — (CCP 2007 PC)

On définit deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $a_0 = a$ et $b_0 = 1$ et la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{1}{b_n}\Big),$$
$$b_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(b_n + \frac{1}{a_n}\Big).$$

Écrire une procédure d'argument $n \in \mathbb{N}$ qui retourne le couple (a_n, b_n).

Exercice 5 — Centrale 2007 PSI

Écrire un algorithme qui calcule la plus petite solution strictement positive de l'équation

$$\sin x + \frac{x}{10} = 0.$$

On vérifiera que cette solution est comprise entre $\pi/2$ et π.

Exercice 6 — CCP 2008 PSI

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3}.$$

Écrire une procédure d'argument $n \in \mathbb{N}^*$ qui retourne la valeur de S_n.

Exercice 7 — CCP 2008 MP

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des entiers de Bernoulli peut être définie par la donnée de $b_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad b_n = \frac{-1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k} b_k.$$

Écrire une procédure d'argument $n \in \mathbb{N}$ qui retourne la valeur de b_n.

Exercice 8 — CCP 2008 TSI

On considère les matrices

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_{n+1} = AX_n$. Écrire une procédure d'argument $n \in \mathbb{N}$ qui retourne la matrice X_{2008}.

Exercice 9 — Centrale 2008 MP

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, une matrice triangulaire supérieure inversible. Pour tout $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{K}^n$, le système

$$Au = w$$

admet donc une, et une seule, solution $u \in \mathbb{K}^n$. Les composantes de u vérifient donc

$$u_n = \frac{1}{a_{n,n}} w_n$$
$$\forall\, 1 \leqslant \ell < n, \quad u_\ell = \frac{1}{a_{\ell,\ell}}\Big(w_\ell - \sum_{k=\ell+1}^{n} a_{\ell,k} u_k\Big).$$

Écrire une procédure d'arguments A et $w \in \mathbb{K}^n$ et qui retourne $u \in \mathbb{K}^n$.

Exercice 10 — Centrale 2008 MP

Étant donnée une matrice inversible $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on construit de proche en proche une famille

$$\big(A_0 = A, A_1, \dots, A_n\big)$$

de matrices

$$A_k = \big(A_k[i,j]\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

qu'on suppose toutes inversibles en effectuant les opérations suivantes :

$$\forall\, 1 \leqslant k < n,\ \forall\, k < i \leqslant n, \quad L_i \leftarrow L_i - \frac{A_k[i,k]}{A_k[k,k]} L_k.$$

On définit alors une matrice triangulaire supérieure $U(A)$ en posant

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n, \quad U(A)[i,j] = A_n[i,j]$$

et une matrice triangulaire inférieure $L(A)$ en posant

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad L(A)[i,i] = 1,$$
$$\forall\, 1 \leqslant j < i \leqslant, \quad L(A)[i,j] = A_n[i,j].$$

On peut démontrer que $A = L(A)U(A)$ et qu'une telle factorisation de A, dite **factorisation LU**, est unique.

Écrire une procédure dont l'argument `A` est la matrice A, qui donne la valeur A_n à la variable `A` et qui ne retourne aucune valeur. (L'argument `A` est passé *par adresse* et non pas *par valeur*.)

Exercice 11 — Centrale 2008 MP

On considère une matrice tridiagonale inversible

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).$$

On pose $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = b_1$ et on définit δ_k pour tout $2 \leqslant k \leqslant n$ par la relation

$$\delta_k = b_k \delta_{k-1} - c_{k-1} a_k \delta_{k-2}.$$

Si tous les réels δ_k sont différents de 0, alors la matrice A peut s'écrire comme le produit LU d'une matrice triangulaire inférieure

$$L = \begin{bmatrix} d_1 & c_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{n-1} \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

où

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad d_k = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}},$$

par une matrice triangulaire supérieure

$$U = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \ell_2 & \ddots & \\ & \ddots & \\ & \ell_n & 1 \end{bmatrix}.$$

Écrire une procédure d'arguments A et $w \in \mathbb{C}^n$ qui retourne l'unique solution $u \in \mathbb{C}^n$ du système

$$Au = w$$

calculée au moyen de la factorisation $A = LU$.

Exercice 12 — Centrale 2008 PC

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose données une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles de $\mathfrak{M}_k(\mathbb{C})$ et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{C}^k$.

Quels que soient $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^k$, il existe une, et une seule, suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{C}^k$ qui vérifie la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = A_n X_n + b_n$$

et telle que $X_{n_0} = a$.

Écrire une procédure ayant pour arguments deux entiers n et n_0 et un vecteur $a \in \mathbb{C}^k$ et retournant le vecteur $X_n \in \mathbb{C}^k$.

☞ *On supposera connues deux fonctions*

$$A = [k \mapsto A_k] \quad \textit{et} \quad b = [k \mapsto b_k]$$

qui seront traitées comme des variables globales.

Exercice 13 **Centrale 2008 PSI**

On considère la procédure suivante dont les arguments sont $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{N}$.

```
f:=proc(a,b)
local i,j,k;
i:=1; j:=a; k:=b;
while (k>0) do
  if type(k,odd)
    then i:=i*j; k:=k-1;
    else j:=j**2; k:=k/2;
  fi;
od;
i;
end;
```

☞ *On rappelle que* `type(k,odd)` *est un booléen qui est vrai lorsque la variable* `k` *est un entier impair (=*odd*) et faux sinon.*

Exprimer simplement la valeur de $f(a, b)$.

Exercice 14 **Centrale 2008 PSI**

Soient a et b, deux réels fixés avec $a \neq 1$. On considère une suite u définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

1. Écrire une procédure `calcul1` d'argument $n \in \mathbb{N}$ qui retourne la valeur de u_n. (On considérera a et b comme les valeurs de deux variables globales.)

2. On démontre que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{b}{1-a} + a^n\Big(u_0 - \frac{b}{1-a}\Big).$$

En déduire une procédure `calcul2` d'argument $n \in \mathbb{N}$ qui retourne la valeur de u_n. Cette procédure est-elle plus efficace que la procédure `calcul1` ?

3. Que faire pour obtenir une procédure réellement plus rapide que `calcul1` ?

Exercice 15 **Centrale 2008 PSI**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\varphi_n = \left[z \mapsto \frac{an^2z + b}{n(n+1)(cz+d)}\right].$$

On considère alors une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par la donnée de $q_1 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad q_{n+1} = \varphi_n(q_n).$$

En supposant définies quatre variables globales contenant les valeurs de a, b, c et d, écrire une procédure d'arguments $q_1 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ qui calcule les valeurs successives de q_n jusqu'à ce que la variation entre q_{n+1} et q_n soit inférieure à ε et retourne la dernière valeur calculée.

Exercice 16 **Centrale 2008 TSI**

Pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, on note $\varphi_1(A)$, la quadrique représentée par l'équation

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - z^2 = 0$$

dans un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la forme de l'équation réduite de $\varphi_1(A)$ en fonction des signes de $\det(A)$ et de $\operatorname{tr}(A)$.

2. Écrire une procédure d'argument A qui retourne la nature de quadrique $\varphi_1(A)$.

Exercice 17 **Centrale 2009 PSI**

1. Étant donnée une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs, on définit trois suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de

$$p_0 = 0, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad A_0 = a_0$$

et la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad p_n = \left| \begin{array}{ll} p_{n-1} + 1 & \text{si } A_{n-1} \geqslant p_{n-1}, \\ p_{n-1} & \text{sinon,} \end{array} \right.$$

$$\varepsilon_n = \left| \begin{array}{ll} \varepsilon_{n-1}/2 & \text{si } A_{n-1} \geqslant p_{n-1}, \\ \varepsilon_{n-1} & \text{sinon,} \end{array} \right.$$

$$\text{et} \quad A_n = A_{n-1} + a_n \varepsilon_n.$$

En supposant que $a_0 = 1$ et que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad a_n = \frac{9}{4(n+1)},$$

écrire une procédure `exemple` d'argument $n \in \mathbb{N}$ qui retourne la liste

$$\big[[0, p_0, \varepsilon_0, A_0], \ldots, [n, p_n, \varepsilon_n, A_n]\big].$$

2. La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant définie comme à la question précédente, on admet qu'on peut définir une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en posant $n_0 = 0$ et

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad n_{k+1} = \min\{n > n_k \,:\, p_n = 1 + p_{n-1}\}.$$

En supposant que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{n+1},$$

écrire une procédure `indexer` d'argument $n \in \mathbb{N}$ et qui retourne la liste

$$\big[[0, n_0], [1, n_1], \ldots, [q, n_q]\big]$$

où q est le plus grand entier k tel que $n_k \leqslant n$.

Exercice 18 — Centrale 2009 PSI

On fixe $x \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

On définit trois suites d'entiers naturels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et une suite réelle $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de

$$p_0 = q_0 = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma_0 = 0$$

et la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \begin{array}{ll} \text{si } S_n > x : & \begin{cases} q_{n+1} = q_n + 1 \\ p_{n+1} = p_n \\ s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1 \end{cases} \\ \text{sinon :} & \begin{cases} q_{n+1} = q_n \\ p_{n+1} = p_n + 1 \\ s_{n+1} = 2p_{n+1} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\text{et} \quad \Sigma_n = \Sigma_{n-1} + u_{s_{n+1}}.$$

Écrire une procédure d'argument $n \in \mathbb{N}$ qui retourne la liste $[s_1, s_2, \dots, s_n]$.

Exercice 19 — Centrale 2009 TSI

Pour tout $x > -1$, on pose

$$f(x) = x \int_0^x \frac{e^t}{1+t}\, dt.$$

1. Pour $x_k = k/n$ avec $k \in \mathbb{N}$, la méthode des trapèzes donne

$$y_k = \frac{k}{n}\left[\frac{1}{2n} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{e^{i/n}}{n+i} + \frac{e^{k/n}}{2(n+k)}\right]$$

pour valeur approchée de $f(x)$.

Pour $x_k = k/n$ avec $-n < k \leqslant -1$, la valeur approchée devient

$$y_k = \frac{-k}{n}\left[\frac{1}{2n} + \sum_{i=k+1}^{-1} \frac{e^{i/n}}{n+i} + \frac{e^{k/n}}{2(n+k)}\right].$$

Écrire une procédure d'arguments $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ qui retourne la liste $(y_k)_{-n<k\leqslant m}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k x^k + o(x^n)$$

où $\lambda_2 = 1$ et

$$\forall\, k \geqslant 2, \quad \lambda_{k+1} = \frac{1}{k!} - \frac{k-1}{k}\lambda_k.$$

Écrire une procédure d'arguments $n \geqslant 2$ et `X` qui retourne la partie régulière du développement limité à l'ordre n de $f(x)$ au voisinage de 0 sous la forme d'un polynôme en l'indéterminée `X`.

Exercice 20 — Centrale TSI 2009

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1)u_{n+1} + nu_n - u_{n-1} = 0.$$

Écrire une procédure d'arguments $(n, x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^2$ qui retourne la valeur de u_n lorsque $u_0 = x$ et $u_1 = y$.

Exercice 21 — Centrale 2010 PC

Les polynômes de Tchebychev $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définis par la donnée de $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Écrire une fonction `tchebychev` d'argument $n \in \mathbb{N}$ qui retourne l'expression développée du polynôme T_n.

Exercice 22 — Centrale 2010 TSI

1. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x - \lfloor x \rfloor}.$$

Pour tout nombre irrationnel $x_0 > 0$, on admet qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x_0$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

On pose alors $a_n = \lfloor u_n \rfloor$. (La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est le **développement en fraction continue** de x_0.)

Écrire une procédure d'arguments x_0 et $n \in \mathbb{N}$ qui retourne la valeur de a_n.

☞ *Utilise* `floor` *pour calculer la partie entière.*

2. On définit deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$p_0 = a_0, \quad q_0 = 1, \quad p_1 = a_0 a_1 + 1, \quad q_1 = a_1$$

et les relations de récurrence suivantes :

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \qquad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

et on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \frac{p_n}{q_n}.$$

Écrire une procédure d'arguments $x_0 > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ qui retourne la valeur de r_n.

Exercice 23 — CCP 2010 TSI

On considère trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de

$$x_0 = y_0 = \frac{1}{2}, \quad z_0 = 0$$

et la relation de récurrence couplée :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} 10x_{n+1} = 7x_n + 4y_n + 5z_n \\ 10y_{n+1} = 3x_n + z_n \\ 10z_{n+1} = 6y_n + 4z_n \end{cases}.$$

Écrire une suite d'instructions permettant de calculer le triplet $(x_{2010}, y_{2010}, z_{2010})$.

Exercice 24 — CCP 2010 TSI

1. On considère les instructions suivantes.

```
u:=0.1:
for k from 1 to 8 do
u:=-k*u/10:
od;
u;
```

Quel est la valeur affichée lors de l'exécution de ces instructions ?

2. Expliquer comment modifier ces instructions pour calculer la valeur de

$$\sum_{k=0}^{8} \frac{(-1)^k k!}{10^{k+1}}.$$

Exercice 25 — CCP 2011 MP

Étant donnée une matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une, et une seule, matrice triangulaire supérieure T sont les coefficients diagonaux sont positifs telle que

$$A = {}^t T T.$$

Cette factorisation est la **décomposition de Choleski** de la matrice A.

Réciproquement, si la matrice A peut être factorisée de la sorte, elle est symétrique et définie positive.

1. Traduire l'équation $A = {}^t T T$ sous la forme d'un système triangulaire.

2. Écrire une procédure d'argument $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et retournant la matrice $T \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ dans le cas où A est définie positive, et un message d'erreur dans le cas contraire.