Cographes

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des Écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juin/Juillet 2015

ATTENTION !

N'oubliez en aucun cas de recopier votre u_0
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

Important.

Il vous a été donné un numéro u_0 qui servira d'entrée à vos programmes. Les réponses attendues sont généralement courtes et doivent être données sur la fiche réponse fournie à la fin du sujet. À la fin du sujet, vous trouverez en fait deux fiches réponses. La première est un exemple des réponses attendues pour un $\widetilde{u_0}$ particulier (précisé sur cette même fiche et que nous notons avec un tilde pour éviter toute confusion!). Cette fiche est destinée à vous aider à vérifier le résultat de vos programmes en les testant avec $\widetilde{u_0}$ au lieu de u_0. Vous indiquerez vos réponses (correspondant à votre u_0) sur la seconde et vous la remettrez à l'examinateur à la fin de l'épreuve.

En ce qui concerne la partie orale de l'examen, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main ou bien à l'aide de la fiche réponse type fournie en annexe***. Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.

Dans ce sujet, on va travailler sur des graphes particuliers, appelés cographes, qui peuvent être représentés par des arbres. On ne considère que des graphes non orientés, sans arête multiple et sans boucle.

1 Les cographes et les coarbres

Un coarbre est un arbre enraciné tel que chaque noeud interne est étiqueté soit **0**, soit **1**. Notez que ces arbres ne sont pas forcément binaires, et les feuilles n'ont pas d'étiquette. Étant donné un coarbre, on peut lui associer un graphe : l'ensemble des sommets est l'ensemble des feuilles de l'arbre, et deux sommets sont adjacents si et seulement si le plus petit ancêtre commun dans le coarbre est un noeud étiqueté **1**.
Si T est un coarbre, on notera $\mathrm{val}(T)$ le cographe associé à T. On dira que $\mathrm{val}(T)$ est l'image de T, ou est le graphe associé à T. Un cographe est un graphe qui est associé à un coarbre. Certains graphes ne peuvent pas être associés à des coarbres, c'est à dire ne sont pas des cographes ; l'ensemble des cographes est donc un sous-ensemble strict de l'ensemble des graphes.

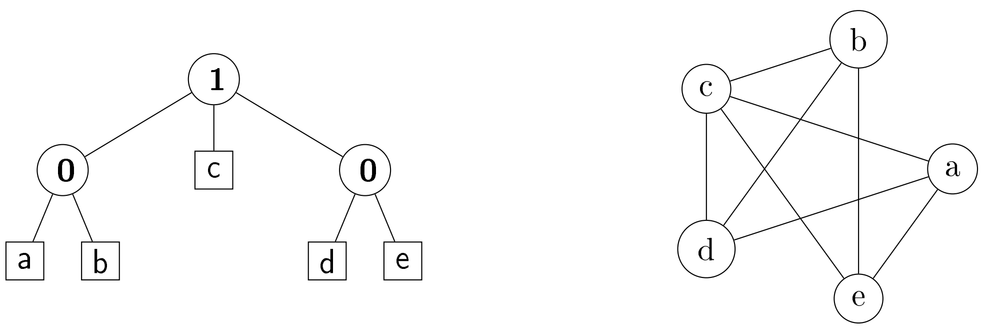

FIGURE 1 – Exemple d'un coarbre (gauche) avec le cographe associé (droite).

2 Génération de cographes

2.1 Générateur pseudo aléatoire

Si $a > 0$ et $b \geq 1$ sont deux entiers, on note $a \bmod b$ le reste de la division euclidienne de a par b, autrement dit l'unique entier r avec $0 \leq r < b$ tel qu'il existe un entier q satisfaisant $a = bq + r$.
Soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite telle que u_0 est l'entier qui vous a été donné (à reporter sur votre fiche réponse), et pour tout $i > 0$:

$$u_{i+1} = 1\,022 \times u_i \mod m$$

où $m = 2^{20} - 3 = 1\,048\,573$.

Question 1 *Calculez :* ***a)*** u_{10} ***b)*** u_{500} ***c)*** $u_{10\,000}$

2.2 Génération des coarbres

Dans un premier temps, on va considérer uniquement des coarbres binaires. (On peut facilement montrer que tous les cographes sont image d'un coarbre binaire.)
Pour tout $n \geq 1$ et $k \geq 0$, soit $T_{n,k}$ le coarbre suivant :
- Si $n = 1$, alors $T_{n,k}$ est le coarbre avec un seul noeud (qui est la racine et une feuille).
- Si $n > 1$, alors $T_{n,k}$ est le coarbre dont la racine est étiquetée $u_{k+1} \bmod 2$, et qui possède deux fils, donnés par les sous-coarbres $T_{i,k+2}$ et $T_{n-i,k+2i}$, avec $i = 1 + (u_k \bmod (n-1))$.

On rappelle que la hauteur d'un arbre est le maximum de la distance entre sa racine et ses feuilles. (La hauteur de l'arbre qui ne possède qu'un seul noeud est donc 0.)

Question 2 *Donnez la hauteur de :*
a) $T_{10,12}$ ***b)*** $T_{500,345}$ ***c)*** $T_{5\,000,6\,789}$

Question à développer pendant l'oral 1 *Quel est le nombre de noeuds du coarbre $T_{n,k}$ en fonction de n ?*

2.3 Génération du cographe correspondant à un coarbre

Soit $G_{n,k}$ le cographe $\mathrm{val}(T_{n,k})$ (c'est à dire le cographe associé au coarbre $T_{n,k}$).

Question 3 *Donnez le nombre d'arêtes et le degré maximum de :*
a) $G_{10,98}$ ***b)*** $G_{500,765}$ ***c)*** $G_{2\,000,4\,321}$

Question à développer pendant l'oral 2 *Quelle est la complexité (en temps et en espace) de votre algorithme ? Peut-on calculer le nombre d'arêtes (respectivement, le degré maximum) de* $\mathrm{val}(t)$ *sans calculer* $\mathrm{val}(t)$, *où t est un coarbre ?*

3 Algorithmes sur les cographes

De nombreux problèmes simples à exprimer sont "NP-complets" sur les graphes, c'est à dire qu'il est très probablement impossible de trouver un algorithme en temps polynomial (et donc un algorithme "rapide") qui permet de le résoudre. Mais beaucoup de ces problèmes deviennent faciles à résoudre sur les cographes, en utilisant leur coarbre.
On demande dans les sections suivantes de programmer des algorithmes pour différents problèmes sur la classe des cographes. Ces sections sont indépendantes.

3.1 Clique

Une clique du graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble de sommets $C \subseteq V$ tel que pour tout $u, v \in C$, $u \neq v$, u et v sont adjacents dans G. Soit $\omega(G)$ la taille maximum d'une clique dans G.
Décider si un graphe G possède une clique de taille k est NP-complet (donc difficile), mais peut se résoudre en temps linéaire sur un cographe, en utilisant son coarbre.

Supposons que t est un coarbre, dont la racine est étiquetée $a \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ et a deux fils. Soient t_1 et t_2 ses deux sous-arbres.

Question à développer pendant l'oral 3 *Montrez que :*
– *si* $a = \mathbf{0}$ *alors* $\omega(\mathrm{val}(t)) = \max(\omega(\mathrm{val}(t_1)), \omega(\mathrm{val}(t_2)))$.
– *si* $a = \mathbf{1}$ *alors* $\omega(\mathrm{val}(t)) = \omega(\mathrm{val}(t_1)) + \omega(\mathrm{val}(t_2))$.

Implémentez un algorithme qui calcule $\omega(\mathrm{val}(t))$.

Question 4 *Donnez :*
a) $\omega(G_{100,314})$ **b)** $\omega(G_{1000,159})$ **c)** $\omega(G_{10\,000,265})$

Question 5 *Donnez la moyenne des suites suivantes :*
a) $(\omega(G_{100,k}))_{k\in\{1,\ldots 1000\}}$ **b)** $(\omega(G_{1000,k}))_{k\in\{1,\ldots 1000\}}$ **c)** $(\omega(G_{10\,000,k}))_{k\in\{1,\ldots 1\,000\}}$

3.2 Forme canonique et isomorphisme

Question à développer pendant l'oral 4 *Montrez que deux coarbres différents peuvent définir le même cographe.*

Un coarbre est en forme canonique s'il respecte les conditions suivantes :
– chaque noeud interne a au moins 2 fils, et
– le parent d'un noeud **0** est un noeud **1**, et le parent d'un noeud **1** est un noeud **0**.
Étant donné un arbre, il y a seulement deux possibilités pour étiqueter les noeuds afin d'obtenir un coarbre canonique valide : l'étiquetage de la racine force l'étiquetage de tous les noeuds internes. On peut facilement montrer que chaque cographe est associé à un unique coarbre canonique, si on ne tient pas compte de l'ordre des fils.
Implémentez un algorithme qui calcule le coarbre canonique d'un cographe G, à partir d'un coarbre T tel que $G = \mathrm{val}(T)$. Soit $T'_{n,k}$ le coarbre canonique de $G_{n,k}$.

Question 6 *Donnez le nombre de noeuds de :*
a) $T'_{100,271}$ **b)** $T'_{1000,828}$ **c)** $T'_{10\,000,182}$

Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont isomorphes (dénoté $G \simeq G'$) s'il existe une bijection $f : V \to V'$ telle que pour tout $u, v \in V$, $\{u, v\} \in E$ si et seulement si $\{f(u), f(v)\} \in V'$. (La complexité de la décision de l'isomorphisme entre deux graphes n'est pas connue, mais beaucoup de spécialistes conjecturent que sa complexité n'est pas polynomiale, sans pour autant être NP-complète.)
On admettra que deux cographes sont isomorphes si et seulement si ils sont définis par le même coarbre canonique, en ne prenant pas en compte l'ordre des fils.

Question à développer pendant l'oral 5 *Expliquez comment construire un ordre total* $\preceq$ *sur les coarbres canoniques tel que* $\mathrm{val}(t) \simeq \mathrm{val}(t')$ *si et seulement si* $t \preceq t'$ *et* $t' \preceq t$.

Implémentez un algorithme qui décide si deux cographes sont isomorphes.

Question 7 *Donnez le plus petit k non nul tel que :*
a) $G_{8,0} \simeq G_{8,k}$ **b)** $G_{12,0} \simeq G_{12,k}$ **c)** $G_{15,0} \simeq G_{15,k}$

Question 8 *Donnez le nombre de classes d'équivalence par isomorphisme dans les ensembles suivants :*
a) $\{G_{10,k}\}_{k\in\{1,\ldots 10\,000\}}$ **b)** $\{G_{15,k}\}_{k\in\{1,\ldots 10\,000\}}$ **c)** $\{G_{20,k}\}_{k\in\{1,\ldots 10\,000\}}$

Question à développer pendant l'oral 6 *Donnez la complexité de vos algorithmes pour les 2 questions précédentes.*

3.3 Reconnaissance des cographes

Soit $G'_{n,k}$ le graphe d'ensemble de sommets $\{1, \ldots n\}$, et tel que deux sommets i et j, avec $i < j$, sont adjacents si et seulement si $u_{(i+u_{(k+j)})}$ est impair.

Question 9 *Combien de graphes ne sont pas connexes parmi les séquences de graphes suivantes :*
a) $(G'_{4,k})_{k\in\{1,\ldots 10\,000\}}$ **b)** $(G'_{6,k})_{k\in\{1,\ldots 10\,000\}}$ **c)** $(G'_{8,k})_{k\in\{1,\ldots 100\,000\}}$ **d)** $(G'_{10,k})_{k\in\{1,\ldots 100\,000\}}$

Le complémentaire d'un graphe G est le graphe $\overline{G}$, qui possède le même ensemble de sommets, et tel que 2 sommets (différents) sont adjacents dans $\overline{G}$ si et seulement si ils ne sont pas adjacents dans G.

Question à développer pendant l'oral 7
- *Quelle propriété a un cographe dont la racine du coarbre canonique associé est étiquetée* ***0*** *?*
- *Montrez que si G est un cographe, alors $\overline{G}$ est un cographe.*
- *Quelle propriété a un cographe dont la racine du coarbre canonique associé est étiquetée* ***1*** *?*

Déduisez un algorithme récursif qui reconnaît un cographe, et construit en même temps son coarbre canonique.

Question 10 *Combien de graphes sont des cographes parmi les séquences de graphes suivantes :*
a) $(G'_{4,k})_{k\in\{1,\ldots 10\,000\}}$ **b)** $(G'_{6,k})_{k\in\{1,\ldots 10\,000\}}$ **c)** $(G'_{8,k})_{k\in\{1,\ldots 100\,000\}}$ **d)** $(G'_{10,k})_{k\in\{1,\ldots 100\,000\}}$

Question à développer pendant l'oral 8
- *Que pouvez-vous conclure sur la classe des cographes ?*
- *Donnez le plus petit graphe (en nombre de sommets) qui n'est pas un cographe. Montrez qu'il est unique, à isomorphisme près.*

Soit $G = (V, E)$ un graphe, et $V' \subseteq V$ un sous-ensemble de sommets. $G[V']$ est le graphe d'ensemble de sommets V', et tel que $u, v \in V'$ sont adjacents dans $G[V']$ si et seulement si ils sont adjacents dans G. Soit H le plus petit graphe (en nombre de sommets, à isomorphisme près) qui n'est pas un cographe.

Question à développer pendant l'oral 9
– *Montrez que s'il existe $V' \subseteq V$ tel que $G[V'] \simeq H$, alors G n'est pas un cographe.*
– *Montrez que si pour tout $V' \subseteq V$, $G[V'] \not\simeq H$, alors G est un cographe.*

3.4 Circuit hamiltonien

Dans un graphe, un cycle est une séquence de sommets $(v_1, \dots v_k)$ telle que v_1 et v_k sont adjacents, et pour tout $1 \leq i < k$, v_i et v_{i+1} sont adjacents. Un cycle est hamiltonien s'il passe une et une seule fois par chaque sommet. Un graphe est hamiltonien s'il possède un cycle hamiltonien. Décider si un graphe est hamiltonien est un problème NP-complet.

Question 11 *Parmi les graphes des séquences suivantes, combien sont hamiltoniens ?*
a) $(G_{10,k})_{k\in\{1,\dots 10\,000\}}$ ***b)*** $(G_{100,k})_{k\in\{1,\dots 10\,000\}}$ ***c)*** $(G_{1\,000,k})_{k\in\{1,\dots 10\,000\}}$
d) $(G_{10\,000,k})_{k\in\{1,\dots 10\,000\}}$

Question à développer pendant l'oral 10 *Expliquez comment fonctionne votre algorithme, et quelle est sa complexité.*

Fiche réponse type: Cographes

$\widetilde{u_0}$: 42

Question 1

a) 167434

b) 420971

c) 146882

Question 2

a) 5

b) 23

c) 29

Question 3

a) 42 9

b) 53092 344

c) 1679866 1997

Question 4

a) 13

b) 102

c) 636

Question 5

a) 23.19

b) 120.03

c) 686.36

Question 6

a) 158

b) 1514

c) 15036

Question 7

a) 861

b) 4475

c) 801996

Question 8

a) 2618

b) 8952

c) 9917

Question 9

a) 4018

b) 1860

c) 6805

d) 2356

Question 10

a) 8140

b) 1702

c) 562

d) 1

Question 11

a) 3536

b) 4697

c) 4955

d) 5004

Fiche réponse: Cographes

Nom, prénom, u_0: ....

Question 1

a)

b)

c)

Question 2

a)

b)

c)

Question 3

a)

b)

c)

Question 4

a)

b)

c)

Question 5

a)

b)

c)

Question 6

a)

b)

c)

Question 7

a)

b)

c)

Question 8

a)

b)

c)

Question 9

a)

b)

c)

d)

Question 10

a)

b)

c)

d)

Question 11

a)

b)

c)

d)