Plus courts chemins

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des Écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juin/Juillet 2014

ATTENTION !

N'oubliez en aucun cas de recopier votre u_0
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

Important.

Sur votre table est indiqué un numéro u_0 qui servira d'entrée à vos programmes. Les réponses attendues sont généralement courtes et doivent être données sur la fiche réponse fournie à la fin du sujet. À la fin du sujet, vous trouverez en fait deux fiches réponses. La première est un exemple des réponses attendues pour un $\widetilde{u_0}$ particulier (précisé sur cette même fiche et que nous notons avec un tilde pour éviter toute confusion!). Cette fiche est destinée à vous aider à vérifier le résultat de vos programmes en les testant avec $\widetilde{u_0}$ au lieu de u_0. Vous indiquerez vos réponses (correspondant à votre u_0) sur la seconde et vous la remettrez à l'examinateur à la fin de l'épreuve.

En ce qui concerne la partie orale de l'examen, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main ou bien à l'aide de la fiche réponse type fournie en annexe***. Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.

1 Préliminaires

On se donne un graphe fini orienté G. On note V l'ensemble des sommets et $E \subset V \times V$ l'ensemble des arcs. Chaque arc (u, v) est muni d'un poids $P(u, v) \in \mathbb{R}$. Un chemin dans le graphe est une suite d'arcs $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ où chaque (a_i, a_{i+1}), pour $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ appartient à E. On définit s et c la source et la cible ; s et c sont deux éléments particuliers de V. Le poids d'un chemin est la somme des poids le long de ce chemin, i.e. avec les notations ci-dessus

$$\sum_{i=0}^{k-1} P(a_i, a_{i+1}).$$

Le poids d'un chemin est aussi appelé longueur de ce chemin. La notion de plus court chemin fait référence aux poids des chemins : la longueur d'un chemin est identique à son poids. Si $a_0 = a_k$, le chemin est appelé cycle.
Les complexités pourront être exprimées en fonction de $|E|$ et $|V|$, cardinaux de E et V respectivement.

2 Définitions préliminaires

Étant donné u_0, on définit par induction :
- $u_t = au_{t-1}$ modulo b (reste de la division entière de au_{t-1} par b).
- $u_{t,0} = u_t$, pour tout $t \geq 0$.
- $u_{t,v} = cu_{t,v-1}$ modulo d pour tous $t \geq 0, v > 0$.
- $u_{t,v,0} = u_{t,v}$ pour tous $t \geq 0, v \geq 0$.
- $u_{t,v,w} = eu_{t,v,w-1}$ modulo f pour tous $t \geq 0$, $v \geq 0$, $w > 0$.

On choisit :

$$\begin{aligned} a &= 263 \\ b &= 269 \\ c &= 271 \\ d &= 281 \\ e &= 283 \\ f &= 293 \end{aligned}$$

u_0 vous est donné (sur votre table) et doit être recopié sur votre fiche réponse. Des réponses types vous sont données à titre d'exemple pour un u_0 particulier, noté $\tilde{u}_0$. Il peut être pertinent de stocker dans un tableau les valeurs de u, tant leur utilisation répétée peut largement pénaliser vos algorithmes s'ils doivent recalculer cette suite de nombreuses fois.

Question 1 *Calculer*

a) $u_{1,2,3}$ **b)** $u_{12,13,14}$ **c)** $u_{13,13,14}$

3 Quelques graphes utiles

3.1 Graphe G_T

On définit le graphe $G_T = (V, E)$ comme suit :
- $V_1 = \{(1,1)\}$, $V_2 = \{(2,1),(2,2)\}$, ..., $V_t = \{(t,1),(t,2),...,(t,t)\}$.
- E_t contient les arêtes de (t,i) à $(t+1,j)$ telles que $(t,i) \in V_t$ et $(t+1,j) \in V_{t+1}$ et
  - $i=1$, $j=1$; dans ce cas le poids de l'arête est f.
  - $\max(i,j) > 1$ et $u_{t,i,j} \geq \lfloor f/4 \rfloor$; dans ce cas le poids de l'arête est $u_{t,i,j} - \lfloor f/4 \rfloor$.
- V est l'union des V_t pour $t = 1, t = 2, \ldots, t = T$.
- E est l'union des E_t pour $t = 1, t = 2, \ldots, t = T-1$.

3.2 Graphe M_T

On définit M_T le graphe ayant les mêmes sommets, les mêmes arêtes, les mêmes poids que G_T, mais **avec chaque arête réorientée à l'envers**.

3.3 Graphe N_T

On définit $N_T = (V, E)$ comme suit :
- $V_1 = \{(1,1)\}$, $V_2 = \{(2,1),(2,2)\}$, ..., $V_t = \{(t,1),(t,2),...,(t,t)\}$.
- E_t contient les arêtes de (t,i) à $(t+1,j)$ telles que $(t,i) \in V_t$ et $(t+1,j) \in V_{t+1}$ et
  - $i=1$, $j=1$; dans ce cas le poids de l'arête est f.
  - $\max(i,j) > 1$ et $u_{t,i,j} \geq \lfloor f/4 \rfloor$; dans ce cas **le poids de l'arête est** $u_{t,i,j} - \lfloor f/2 \rfloor$.
- V est l'union des V_t pour $t = 1, t = 2, \ldots, t = T$.
- E est l'union des E_t pour $t = 1, t = 2, \ldots, t = T-1$.

3.4 Graphe X_T

On définit le graphe $X_T = (V, E)$ comme suit :
- V est l'union des V_t pour $t = 1, t = 2, \ldots, t = T$.
- E est l'union des E_t pour $t = 1, t = 2, \ldots, t = T-1$.
- $V_1 = \{(1,1)\}$, $V_2 = \{(2,1),(2,2)\}$, ..., $V_t = \{(t,1),(t,2),...,(t,t)\}$.
- E_t contient les arêtes de (t,i) à $(t+1,j)$ telles que $(t,i) \in V_t$ et $(t+1,j) \in V_{t+1}$ et
  - $i=1$, $j=1$; dans ce cas **le poids de l'arête est** $10(t-1)^3 + f$**.**
  - $\max(i,j) > 1$ et $u_{t,i,j} \geq \lfloor f/4 \rfloor$; dans ce cas **le poids de l'arête est** $u_{t,i,j} - \lfloor f/4 \rfloor + 10 \times (t-i)^3$**.**

3.5 Graphe Z_T

On définit Z_T le graphe ayant les mêmes sommets, les mêmes arêtes, les mêmes poids que N_T, mais **avec chaque arête réorientée à l'envers**.

3.6 Implémentation

Question 2 *Calculer le nombre d'arêtes dans G_T si*

a) $T = 2$ **b)** $T = 3$ **c)** $T = 10$ **d)** $T = 20$ **e)** $T = 30$

Question 3 *Calculer le nombre d'arêtes de poids positifs ou nuls dans* N_T *si*

a) $T = 2$ **b)** $T = 3$ **c)** $T = 10$ **d)** $T = 20$ **e)** $T = 30$

4 Algorithme de Dijkstra

Les valeurs $P(u, v)$ sont supposées positives au sens large.
L'algorithme de Dijkstra procède comme suit :
– Pour chaque a dans V, initialiser $L(a) = +infini$.
– Initialiser $L(s) = 0$.
– Soit a non marqué dans V avec $L(a)$ minimal :
  – Si $L(a) \geq L(c)$, interrompre l'algorithme.
  – marquer a ;
  – pour chaque b dans les successeurs de a, $L(b) \leftarrow min(L(b), L(a) + P(a, b))$.

Question à développer pendant l'oral : Où est stocké le poids du plus court chemin de s à c à la fin de l'algorithme de Dijkstra ?
Question à développer pendant l'oral : Quelle est la complexité de l'algorithme de Dijkstra ? Prouver.
Question à développer pendant l'oral : Quelle structure de données permet d'atteindre cette complexité ?
Question à développer pendant l'oral : Exhiber un cas où l'algorithme de Dijkstra est beaucoup plus efficace que ne le laisse penser la taille du graphe et la borne de complexité.

Question 4 *Calculer le plus court chemin de* $s = (1, 1)$ *à* $c = (T, 1)$ *dans* G_T *si*

a) $T = 2$; **b)** $T = 3$; **c)** $T = 10$; **d)** $T = 20$; **e)** $T = 30$.

5 Algorithme de Bellman-Ford

Étant donné un certain sommet c, l'algorithme de Bellman-Ford fonctionne comme suit :
– pour chaque sommet a, initialiser $B(a) = +\infty$
– initialiser $B(c) = 0$
– répéter $|V| - 1$ fois :
  – pour chaque arête (u, v), $B(u) \leftarrow min(B(u), P(u, v) + B(v))$

Pour une bonne implémentation, on prendra éventuellement en compte la structure des graphes utilisés dans les questions ci-dessous.
Question à développer pendant l'oral : Quelle est la complexité de l'algorithme de Bellman-Ford ?
Question à développer pendant l'oral : Que trouve-t-on dans $B(s)$?
Question à développer pendant l'oral : Peut-on modifier l'algorithme pour détecter les cycles de poids négatif ?

Question 5 *Soient* i *et* j *vérifiant* $1 \leq i \leq T$ *et* $1 \leq j \leq \lceil T/2 \rceil$ *et tels que le chemin de* (T, i) *à* $(\lceil T/2 \rceil, j)$ *dans* M_T *soit de poids minimal. Donner* i *et le poids minimal lorsque :*

a) $T = 2$ **b)** $T = 3$ **c)** $T = 10$ **d)** $T = 20$ **e)** $T = 30$
En cas d'égalité entre plusieurs couples (i, j), on sélectionnera i minimal.

Question 6 *Soient i et j vérifiant $1 \leq i \leq T$ et $1 \leq j \leq \lceil T/2 \rceil$ et tels que le chemin de (T, i) à $(\lceil T/2 \rceil, j)$ dans Z_T soit de poids minimal. Donner i et le poids minimal lorsque :*

a) $T = 2$ **b)** $T = 3$ **c)** $T = 10$ **d)** $T = 20$ **e)** $T = 30$
En cas d'égalité entre plusieurs couples (i, j), on sélectionnera i minimal.

6 Algorithme A*

On se donne une fonction dite heuristique h, de V dans $\mathbb{R}$.
L'algorithme A* avec heuristique h est une variante de l'algorithme de Dijkstra, définie comme suit :
- Pour chaque a dans V, initialiser $L(a) = +\infty$.
- Initialiser $L(s) = 0$.
- Soit a non marqué dans V avec $L(a) + h(a)$ minimal :
  - Si $L(a) \geq L(c)$, interrompre l'algorithme.
  - marquer a ;
  - pour chaque b dans les successeurs de a, $L(b) \leftarrow min(L(b), L(a) + P(a, b))$.

On voit que le déroulement de A^* dépend du choix de la fonction h.
Question à développer pendant l'oral : Quel cas de fonction h rend A^* équivalent à l'algorithme de Dijkstra ?
Question à développer pendant l'oral : Prouver que pour un certain h, l'algorithme A^* n'est pas consistant (i.e. échoue sur certaines instances).
Question à développer pendant l'oral : Supposons que pour tout u dans V, $h(u)$ est inférieur ou égal à la longueur du plus court chemin de u à la cible. Prouver qu'alors A^* est consistant.
Question à développer pendant l'oral : Quelle fonction h est idéale pour réduire le temps de calcul de l'algorithme A^* tout en obtenant une solution juste ?
Question à développer pendant l'oral : Dans quel cas recommanderiez-vous l'algorithme de Bellman-Ford, l'algorithme de Dijkstra, l'algorithme A* ?

Question 7 *Implémenter A^* avec un h bien choisi pour calculer le plus court chemin de $s = (1, 1)$ à $c = (T, 1)$ dans X_T si*

a) $T = 3$: donner la longueur obtenue. **b)** $T = 40$: donner la longueur obtenue. **c)** $T = 75$: donner la longueur obtenue. **d)** $T = 90$: donner la longueur obtenue.
Question à développer pendant l'oral : Le temps de calcul est-il beaucoup modifié en passant à A^* au lieu de Dijkstra ?

7 Algorithme de Johnson

L'algorithme de Johnson est défini comme suit pour trouver tous les plus courts chemins (i.e. les plus courts chemins pour toute paire $(s, c) \in V^2$, avec V les sommets et E les arêtes d'un graphe G) :

- ajouter un nouveau sommet q au graphe ; pour chaque $u \in V$, une arête est ajoutée entre q et u, avec poids $P(q, u) = 0$. Soit G' le nouveau graphe, V' son ensemble de sommets, E' son ensemble d'arêtes.
- appliquer Bellman-Ford (convenablement adapté) pour calculer, pour chaque sommet $u \in V'$, la longueur du chemin le plus court de q a u dans G'.
- modifier les poids des arêtes dans V' :

$$P(u, v) \leftarrow P(u, v) + h(u) - h(v). \tag{1}$$

- supprimer le sommet q et les arêtes afférentes.
- appliquer l'algorithme de Dijkstra (convenablement adapté) entre chaque paire de sommets.

Question à développer pendant l'oral : Montrer que V', apres recalcul des poids des arêtes en Eq. 1, n'a pas de poids négatif.
Question à développer pendant l'oral : Montrer que les plus courts chemins dans V', pour les sommets dans V, sont les plus courts chemins dans V (au sens : les origines/destinations des chemins les plus courts sont les mêmes).
Question à développer pendant l'oral : Quelle est la complexité de l'algorithme de Johnson ?

Question 8 *Pour les différentes valeurs de T ci-dessous, déterminer la longueur du chemin le plus court de s à c pour s et c dans N_T (respectivement dans G_T) tels que (i) $s \neq c$, (ii) le chemin de s à c est de longueur finie, et (iii) le plus court chemin de s à c est de longueur maximale parmi les couples (s, c) dans ce cas.*

a) $T = 3$ **b)** $T = 4$ **c)** $T = 9$ **d)** $T = 18$ **e)** $T = 27$ **f)** $T = 40$

8 Arbre couvrant

Soit un graphe non-orienté, i.e. une arête existe du sommet a au sommet b si et seulement si une arête de même poids existe du sommet b au sommet a. On ne distinguera pas ces deux arêtes et on supposera qu'il n'existe qu'une arête, au maximum, de a à b.
Ce graphe sera supposé connexe ; c'est-à-dire que pour tous sommets a et b, il existe un chemin de a à b de longueur finie.
Un arbre de ce graphe est un sous-graphe connexe et sans cycle. Le poids d'un tel arbre est la somme des poids de ses arêtes.
On cherche un arbre couvrant de poids minimal.
Un algorithme glouton est un algorithme progressant peu à peu vers une solution, en ajoutant, de manière incrémentale, des éléments optimaux au moins pour une vision de court terme.
Question à développer pendant l'oral : Proposer un algorithme glouton construisant un arbre couvrant de poids minimal.
Question à développer pendant l'oral : Cet algorithme est-il exact, i.e. propose-t-il forcément une solution de poids minimal ?

Question 9 *Considérez le graphe G_T. Supprimez l'orientation des arêtes. Ajoutez une arête de poids 500 entre toute paire de sommets qui ne sont pas encore connectés par une arête (ceci garantit la connexité). Quelle est le poids minimal d'un arbre couvrant si :*

a) $T = 10$ **b)** $T = 30$ **c)** $T = 60$ **d)** $T = 100$ **e)** $T = 130$

Fiche réponse <u>type</u>: Plus courts chemins

$\widetilde{u_0}$: 173

Question 1

a) 86

b) 151

c) 253

Question 2

a) 1

b) 6

c) 250

d) 1984

e) 6756

Question 3

a) 1

b) 4

c) 163

d) 1343

e) 4550

Question 4

a) 293

b) 586

c) 695

d) 755

e) 842

Question 5

a) 1,293

b) 1,25

c) 7,64

d) 1,74

e) 29,66

Question 6

a) 1,293

b) 1,-48

c) 7,-301

d) 1,-656

e) 29,-1029

Question 7

a) 596

b) 3361

c) 5820

d) 6956

Question 8

a) 586,586

b) 879,879

c) 879,879

d) 879,879

e) 879,879

f) 879,897

Question 9

a) 1884

b) 5258

c) 10948

d) 20125

e) 28635

Fiche réponse: Plus courts chemins

Nom, prénom, u_0: ....

Question 1

a)

b)

c)

Question 2

a)

b)

c)

d)

e)

Question 3

a)

b)

c)

d)

e)

Question 4

a)

b)

c)

d)

e)

Question 5

a)

b)

c)

d)

e)

Question 6

a)

b)

c)

d)

e)

Question 7

a)

b)

c)

d)

Question 8

a)

b)

c)

d)

e)

f)

Question 9

a)

b)

c)

d)

e)