Pavages apériodiques

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des Écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juin/Juillet 2013

ATTENTION !

N'oubliez en aucun cas de recopier votre u_0
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

Important.

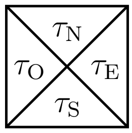
Sur votre table est indiqué un numéro u_0 qui servira d'entrée à vos programmes. Les réponses attendues sont généralement courtes et doivent être données sur la fiche réponse fournie à la fin du sujet. À la fin du sujet, vous trouverez en fait deux fiches réponses. La première est un exemple des réponses attendues pour un $\widetilde{u_0}$ particulier (précisé sur cette même fiche et que nous notons avec un tilde pour éviter toute confusion!). Cette fiche est destinée à vous aider à vérifier le résultat de vos programmes en les testant avec $\widetilde{u_0}$ au lieu de u_0. Vous indiquerez vos réponses (correspondant à votre u_0) sur la seconde et vous la remettrez à l'examinateur à la fin de l'épreuve.

En ce qui concerne la partie orale de l'examen, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main ou bien à l'aide de la fiche réponse type fournie en annexe***. Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.

Introduction

En 1961, le mathématicien et philosophe Hao Wang présenta une nouvelle famille de tuiles carrées, appelées tuiles de Wang, et conjectura que, si un jeu de telles tuiles permettait de paver le plan, alors ce même jeu de tuiles permettait de paver le plan de manière périodique. Cette conjecture fut cependant rapidement infirmée, et un premier contre-exemple, comportant initialement 20 426 tuiles, fut donné par Robert Berger en 1966. Depuis, plusieurs chercheurs, dont Raphael Robinson, Donald Knuth, Roger Penrose, Robert Ammann, ou encore Jarkko Kari, ont contribué à faire diminuer le nombre de tuiles de Wang nécessaires pour paver le plan de manière exclusivement apériodique. Aujourd'hui, le plus petit jeu de tuiles apériodique connu, découvert par Karel Culik II en 1996, comporte 13 tuiles. L'existence de jeux de tuiles plus petits reste cependant une question ouverte.
Dans ce sujet, nous nous intéressons donc à la construction et aux propriétés de tels jeux de tuiles.

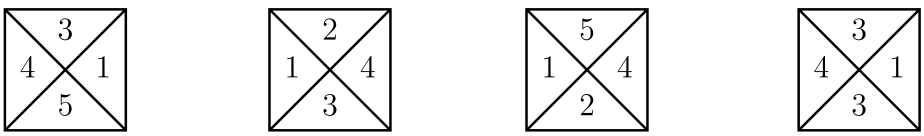
Définition 1 (Tuile de Wang) *Étant donné un ensemble fini de couleurs $\mathcal{C}$, une tuile de Wang τ définie sur $\mathcal{C}$ est un quadruplet de couleurs $\tau = (\tau_{\mathrm{N}}, \tau_{\mathrm{S}}, \tau_{\mathrm{E}}, \tau_{\mathrm{O}}) \in \mathcal{C}^4$. Schématiquement, on pourra représenter une telle tuile par un carré portant les couleurs τ_{N}, τ_{S}, τ_{E} et τ_{O} sur ses côtés nord, sud, est et ouest, respectivement :*



Un ensemble fini $\mathcal{T}$ de tuiles de Wang est appelé jeu de tuiles.

Définition 2 (Pavage du plan) *Étant donné un jeu de tuiles de Wang $\mathcal{T}$, un pavage du plan par $\mathcal{T}$ est une application $\pi : \mathbb{Z}^2 \to \mathcal{T}$ qui à tout couple (i, j) de coordonnées entières du plan fait correspondre une tuile $\pi(i, j) = \tau \in \mathcal{T}$, de telle sorte que deux tuiles adjacentes aient la même couleur sur le bord qu'elles partagent.*
Ainsi :
- *il n'est pas possible de tourner une tuile, ou de prendre sa symétrique par rapport à un axe ou un point ;*
- *chaque tuile de $\mathcal{T}$ peut apparaître autant de fois que nécessaire dans le pavage ;*
- *pour tous i et $j \in \mathbb{Z}$, on a $\pi(i, j)_{\mathrm{E}} = \pi(i + 1, j)_{\mathrm{O}}$ et $\pi(i, j)_{\mathrm{N}} = \pi(i, j + 1)_{\mathrm{S}}$.*

Par exemple, avec l'ensemble de couleur $\mathcal{C} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et le jeu de quatre tuiles $\mathcal{T} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$ suivant



$\tau_1 = (3, 5, 1, 4)$ $\tau_2 = (2, 3, 4, 1)$ $\tau_3 = (5, 2, 4, 1)$ $\tau_4 = (3, 3, 1, 4)$

il est possible de paver le plan comme présenté Figure 1. Incidemment, il s'agit de l'unique manière de paver le plan avec ce jeu de tuiles, à translations près.

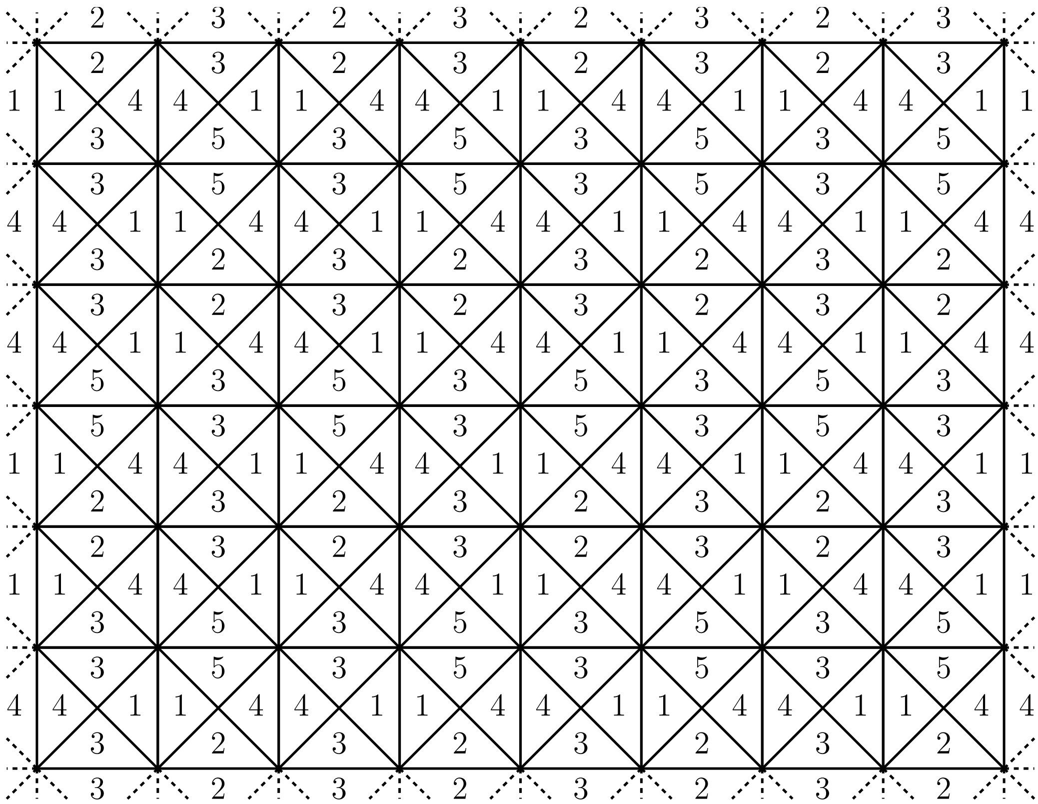


FIGURE 1 – Exemple de pavage du plan avec le jeu de tuiles $\mathcal{T} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$.

Définition 3 (Pavage périodique) *Soit $\mathcal{T}$ un jeu de tuiles de Wang qui pave le plan. Un tel pavage π est dit périodique si et seulement s'il existe deux entiers $M > 0$ et $N > 0$ tels que, pour tous i et $j \in \mathbb{Z}$, $\pi(i+M, j+N) = \pi(i,j)$. Lorsque M et N sont minimaux pour cette notion, le couple (M,N) est appelé période du pavage π.*
Dans le cas où il n'existe pas de tels entiers M et N, le pavage est dit apériodique.

Ainsi, le pavage donné comme exemple en Figure 1 est périodique de période $(2,4)$.

Définition 4 (Jeu de tuiles apériodique) *Un jeu de tuiles de Wang $\mathcal{T}$ est dit apériodique si et seulement si*

(i) $\mathcal{T}$ pave le plan, et

(ii) tout pavage du plan par $\mathcal{T}$ est apériodique.

Ainsi, nous ne cherchons pas seulement un jeu de tuiles qui pave le plan de manière apériodique, mais nous souhaitons aussi qu'aucun des pavages du plan par ce jeu de tuiles ne soit périodique.
Cependant, il est prouvé qu'il n'est pas possible de tester algorithmiquement si un jeu de tuiles donné pave le plan : il s'agit d'un problème indécidable. De même, il n'est pas possible de tester algorithmiquement si un jeu de tuiles pave le plan périodiquement. Nous allons donc chercher ici des méthodes permettant de tester efficacement si un jeu de tuiles pave une partie du plan (comme un carré ou une bande horizontale), tout en nous assurant que les pavages obtenus ne sont pas périodiques.

Ce sujet se divise en trois parties, les deux dernières étant relativement peu dépendantes l'une de l'autre. Dans la première partie, nous chercherons à générer des jeux de tuiles aléatoires, que nous utiliserons pour paver des carrés du plan dans la deuxième partie, et des bandes horizontale dans la troisième.

1 Génération de jeux de tuiles aléatoires

Avant toute chose, considérons la suite d'entiers positifs $(u_k)_{k\geq 0}$ définie par

$$u_k = \begin{cases} \text{votre } u_0 \text{ (à reporter sur votre fiche réponse)} & \text{si } k = 0\text{, et} \\ 15\,091 \times u_{k-1} \bmod 64\,007 & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Étant donné un entier $n > 0$, nous notons $\mathcal{C}_n$ l'ensemble de n couleurs donné par $\mathcal{C}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Pour tout entier positif k, nous définissons alors la tuile de Wang $\tau_{n,k}$ comme $\tau_{n,k} = (\tau_{n,k,\mathrm{N}}, \tau_{n,k,\mathrm{S}}, \tau_{n,k,\mathrm{E}}, \tau_{n,k,\mathrm{O}}) \in \mathcal{C}_n^4$ avec

$$\begin{cases} \tau_{n,k,\mathrm{N}} = (u_k \mod n) + 1, \\ \tau_{n,k,\mathrm{S}} = (u_{k+1} \bmod n) + 1, \\ \tau_{n,k,\mathrm{E}} = (u_{k+2} \bmod n) + 1, \text{ et} \\ \tau_{n,k,\mathrm{O}} = (u_{k+3} \bmod n) + 1. \end{cases}$$

Question 1 *Donnez, dans cet ordre, les couleurs* $(\tau_\mathrm{N}, \tau_\mathrm{S}, \tau_\mathrm{E}, \tau_\mathrm{O})$ *des tuiles suivantes :*
a) $\tau_{5,10}$, ***b)*** $\tau_{50,100}$, ***c)*** $\tau_{500,1000}$.

Étant donnés les entiers $m > 0$, $n > 0$, ainsi que $k \geq 0$, nous définissons aussi $\mathcal{T}_{m,n,k}$ comme le jeu de tuiles suivant :

$$\mathcal{T}_{m,n,k} = \{\tau_{n,k}, \tau_{n,k+4}, \ldots, \tau_{n,k+4(m-1)}\}.$$

Il est à noter que, si le nombre de tuiles m est bien plus grand que le nombre de couleurs n, alors la probabilité que le m-uplet de tuiles $(\tau_{n,k+4i})_{0\leq i<m}$ comporte des doublons est élevée. Ainsi, le nombre de tuiles distinctes dans le jeu $\mathcal{T}_{m,n,k}$ est probablement inférieur à m.

Enfin, étant donné que les couleurs que nous considérons sont représentées par des entiers, nous disposons d'une relation d'ordre total naturelle sur ces couleurs. Ainsi, afin de comparer des tuiles entre elles, nous pouvons utiliser la relation d'ordre lexicographique $<_\mathrm{lex}$ définie de la manière suivante : étant données deux tuiles $\tau = (\tau_\mathrm{N}, \tau_\mathrm{S}, \tau_\mathrm{E}, \tau_\mathrm{O})$ et $\tau' = (\tau'_\mathrm{N}, \tau'_\mathrm{S}, \tau'_\mathrm{E}, \tau'_\mathrm{O})$, nous notons

$$\tau <_\mathrm{lex} \tau' \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} \tau_\mathrm{N} < \tau'_\mathrm{N}, & \text{ou} \\ \tau_\mathrm{N} = \tau'_\mathrm{N} \text{ et } \tau_\mathrm{S} < \tau'_\mathrm{S}, & \text{ou} \\ \tau_\mathrm{N} = \tau'_\mathrm{N},\ \tau_\mathrm{S} = \tau'_\mathrm{S} \text{ et } \tau_\mathrm{E} < \tau'_\mathrm{E}, & \text{ou} \\ \tau_\mathrm{N} = \tau'_\mathrm{N},\ \tau_\mathrm{S} = \tau'_\mathrm{S},\ \tau_\mathrm{E} = \tau'_\mathrm{E} \text{ et } \tau_\mathrm{O} < \tau'_\mathrm{O}. \end{cases}$$

Question 2 *Combien de tuiles distinctes comprennent les jeux suivants ? Pour chaque jeu, indiquez aussi les couleurs de la plus petite tuile (selon l'ordre lexicographique* $<_\mathrm{lex}$ *défini plus haut).*
a) $\mathcal{T}_{100,5,10}$, ***b)*** $\mathcal{T}_{1000,10,100}$, ***c)*** $\mathcal{T}_{10000,20,1000}$.

2 Pavage d'un carré

Étant donné un jeu de tuiles $\mathcal{T}$, nous cherchons ici à paver un carré du plan de taille $w \times w$. En d'autres termes, nous souhaitons trouver les pavages $\pi_{w\times w} : \{1, 2, \ldots, w\}^2 \to \mathcal{T}$ qui associent à chaque point (i, j), pour $1 \leq i, j \leq w$, une tuile $\pi_{w\times w}(i, j) \in \mathcal{T}$ et qui vérifient les containtes de pavage :
- pour tous $1 \leq i < w$ et $1 \leq j \leq w$, $\pi_{w\times w}(i, j)_{\mathrm{E}} = \pi_{w\times w}(i + 1, j)_{\mathrm{O}}$, et
- pour tous $1 \leq i \leq w$ et $1 \leq j < w$, $\pi_{w\times w}(i, j)_{\mathrm{N}} = \pi_{w\times w}(i, j + 1)_{\mathrm{S}}$.

Nous dirons alors d'un tel pavage $\pi_{w\times w}$ qu'il est périodique si les couleurs des bords nord et sud du carré coïncident, ainsi que celles des bords est et ouest. En d'autres termes, $\pi_{w\times w}$ est périodique si et seulement si
- pour tout $0 \leq i \leq w$, $\pi_{w\times w}(i, w)_{\mathrm{N}} = \pi_{w\times w}(i, 1)_{\mathrm{S}}$, et
- pour tout $0 \leq j \leq w$, $\pi_{w\times w}(w, j)_{\mathrm{E}} = \pi_{w\times w}(1, j)_{\mathrm{O}}$.

Afin de trouver tous les pavages du carré $w \times w$, nous allons procéder par recherche exhaustive en énumérant toutes les combinaisons valides de tuiles dans le carré.

Question à développer pendant l'oral : Quels calculs préalables peut-on effectuer sur le jeu de tuiles $\mathcal{T}$ afin de mener cette recherche exhaustive le plus efficacement possible ? Détaillez l'algorithme utilisé pour l'énumération des pavages d'un carré $w \times w$, ainsi que sa complexité en temps et en espace.

Question 3 *Pour chaque jeu de tuiles et valeur de w suivantes, indiquez combien de pavages distincts du carré $w \times w$ existent. Parmi ces pavages, combien sont périodiques ?*
a) $\mathcal{T}_{20,5,10}$ et $w = 2$, ***b)*** $\mathcal{T}_{40,10,100}$ et $w = 4$, ***c)*** $\mathcal{T}_{50,10,1000}$ et $w = 8$.

3 Pavage d'une bande horizontale

Plutôt que d'un motif carré $w \times w$, nous nous intéressons désormais au pavage d'une bande horizontale du plan de hauteur h, notée $\mathcal{H}_h$. Plus formellement, nous avons $\mathcal{H}_h = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq j \leq h\} = \mathbb{Z} \times \{1, 2, \ldots, h\}$.
Ainsi, pour un jeu de tuiles $\mathcal{T}$ donné, un pavage de $\mathcal{H}_h$ est une application $\pi_h : \mathbb{Z} \times \{1, 2, \ldots, h\} \to \mathcal{T}$ qui à tout couple (i, j) de coordonnées entières tel que $1 \leq j \leq h$ associe une tuile $\pi_h(i, j) \in \mathcal{T}$ de sorte à vérifier les contraintes usuelles de pavage :
- pour tous $i \in \mathbb{Z}$ et $1 \leq j \leq h$, $\pi_h(i, j)_{\mathrm{E}} = \pi_h(i + 1, j)_{\mathrm{O}}$, et
- pour tous $i \in \mathbb{Z}$ et $1 \leq j < h$, $\pi_h(i, j)_{\mathrm{N}} = \pi_h(i, j + 1)_{\mathrm{S}}$.

3.1 Élimination des tuiles inutiles

Comme vous avez pu vous en rendre compte à lors de la recherche de pavages de carrés $w \times w$, l'explosion combinatoire due à la recherche exhaustive empêche de considérer des parties du plan de grande taille. Une solution pour limiter cette explosion est donc de simplifier le jeu de tuiles en éliminant certaines tuiles dites inutiles.

Question à développer pendant l'oral : Soient $\mathcal{T}$ un jeu de tuiles, ainsi qu'une tuile $\tau = (\tau_{\mathrm{N}}, \tau_{\mathrm{S}}, \tau_{\mathrm{E}}, \tau_{\mathrm{O}})$ de $\mathcal{T}$. Montrez que si aucune tuile de $\mathcal{T}$ n'est de couleur τ_{E} sur son côté ouest, alors la tuile τ n'apparaîtra dans aucun pavage de la bande horizontale $\mathcal{H}_h$ par $\mathcal{T}$, pour tout $h > 0$. Nous dirons alors que la tuile τ est inutile.

Il en va bien sûr de même si aucune tuile de $\mathcal{T}$ n'est de couleur τ_O sur son côté est. Concevez alors un algorithme permettant de débarrasser un jeu de tuiles de toutes ses tuiles inutiles. Quelle est sa complexité en temps et en espace ?

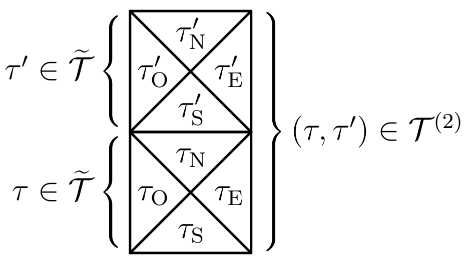
Remarque. Comme nous ne nous intéressons qu'au pavage de bandes horizontales, nous ne cherchons pas à éliminer les tuiles inutiles au nord et au sud, mais uniquement celles à l'est et à l'ouest.

Question 4 *Une fois éliminées toutes les tuiles inutiles des jeux suivants, combien de tuiles reste-t-il ?*
a) $\mathcal{T}_{100,25,10}$, ***b)*** $\mathcal{T}_{1000,250,100}$, ***c)*** $\mathcal{T}_{10000,2500,1000}$.

3.2 Test de pavage

Question à développer pendant l'oral : Soient $\mathcal{T}$ un jeu de tuiles, et $\widetilde{\mathcal{T}}$ ce même jeu débarrassé de ses tuiles inutiles. Montrez que si $\widetilde{\mathcal{T}}$ n'est pas vide alors il pave la bande horizontale $\mathcal{H}_1$.
Cette propriété reste-t-elle vraie pour des bandes plus hautes $\mathcal{H}_h$ avec $h > 1$?

Pour savoir si un jeu de tuiles pave effectivement une bande de hauteur $h > 1$, nous allons procéder itérativement. Pour cela, considérons tout d'abord un jeu de tuiles initial $\mathcal{T}$ défini sur un ensemble de couleurs $\mathcal{C}$, et notons $\widetilde{\mathcal{T}}$ ce même jeu de tuiles après en avoir retiré toutes les tuiles inutiles. En supposant que $\widetilde{\mathcal{T}}$ ne soit pas vide, nous construisons alors $\mathcal{T}^{(2)}$ comme l'ensemble de tous les empilements (τ, τ') de deux tuiles τ et $\tau' \in \widetilde{\mathcal{T}}$ telles que $\tau_\mathrm{N} = \tau'_\mathrm{S}$. En d'autres termes, nous avons $\mathcal{T}^{(2)} = \{(\tau, \tau') \in \widetilde{\mathcal{T}}^2 \mid \tau_\mathrm{N} = \tau'_\mathrm{S}\}$:



Question à développer pendant l'oral : Montrez que $\mathcal{T}^{(2)}$ est aussi un jeu de tuiles de Wang défini sur l'ensemble de couleurs $\mathcal{C}^{(2)} = \mathcal{C} \cup (\mathcal{C} \times \mathcal{C})$. Déduisez-en un moyen de vérifier si un jeu de tuiles donné pave la bande horizontale $\mathcal{H}_2$.

Question 5 *Pour chacun des jeux de tuiles $\mathcal{T}$ suivants, contruisez $\mathcal{T}^{(2)}$ comme ci-dessus et indiquez le nombre d'empilements de deux tuiles distincts qu'il comporte. Parmi ces empilements, combien sont « utiles » ? Déduisez-en à chaque fois si $\mathcal{T}$ pave ou non la bande horizontale $\mathcal{H}_2$.*
a) $\mathcal{T}_{100,15,10}$, ***b)*** $\mathcal{T}_{1000,200,100}$, ***c)*** $\mathcal{T}_{10000,400,1000}$.

Il est bien entendu possible de répéter cette construction un nombre arbitraire de fois : étant donné $\widetilde{\mathcal{T}}^{(h)}$ l'ensemble des empilements de h tuiles (débarrassé des empilements inutiles), on obtient l'ensemble des empilements de $h+1$ tuiles, noté $\mathcal{T}^{(h+1)}$, comme

$$\mathcal{T}^{(h+1)} = \left\{ (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h, \tau_{h+1}) \in \widetilde{\mathcal{T}}^{h+1} \;\middle|\; (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h) \in \widetilde{\mathcal{T}}^{(h)} \text{ et } \tau_{h,\mathrm{N}} = \tau_{h+1,\mathrm{S}} \right\}.$$

Par convention, nous noterons $\mathcal{T}^{(1)} = \mathcal{T}$ et $\widetilde{\mathcal{T}}^{(1)} = \widetilde{\mathcal{T}}$ pour les « empilements » d'une seule tuile.
En suivant cette construction, et en voyant $\mathcal{T}^{(h)}$ comme un jeu de tuiles de Wang, l'ensemble de couleurs sur lequel sont définies ces tuiles est $\mathcal{C}^{(h)} = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}^h$, dont le cardinal augmente de façon exponentielle avec h. Cependant, en général, le nombre de couleurs effectivement nécessaires à la représentation des tuiles de $\mathcal{T}^{(h)}$ est bien moindre. Il est donc naturel de maintenir cet ensemble de couleurs le plus petit possible en effectuant une renumérotation des couleurs.

Question à développer pendant l'oral : Mettez au point un algorithme qui, étant donné un jeu de tuiles $\mathcal{T}$, renumérote les couleurs de ces tuiles en utilisant le moins de couleurs possible. Quelle est sa complexité en temps et en espace ?

Indication. Remarquez pour cela que les ensembles de couleurs nord/sud et est/ouest sont en fait indépendants, et qu'il est possible de les renuméroter séparément.

Question 6 *Pour chaque jeu de tuiles $\mathcal{T}$ ci-dessous, indiquez le nombre minimal de couleurs nécessaires pour le représenter.*
a) $\mathcal{T}_{100,150,10}$, ***b)*** $\mathcal{T}_{1000,1500,100}$, ***c)*** $\mathcal{T}_{10000,15000,1000}$.

Question 7 *Pour chacun des jeux de tuiles $\mathcal{T}$ et des hauteurs h suivantes, indiquez le nombre $|\widetilde{\mathcal{T}}^{(h)}|$ d'empilements « utiles » de h tuiles de $\mathcal{T}$, ainsi que le nombre minimal de couleurs nécessaires pour les représenter comme des tuiles de Wang. Enfin, déduisez-en si $\mathcal{T}$ pave la bande horizontale $\mathcal{H}_h$.*
a) $\mathcal{T}_{10,3,10}$ et $h = 30$, ***b)*** $\mathcal{T}_{30,7,100}$ et $h = 20$, ***c)*** $\mathcal{T}_{100,13,1000}$ et $h = 10$.

3.3 Test de périodicité

Grâce aux algorithmes développés dans la partie précédente, nous savons donc déterminer si un jeu de tuiles donné pave ou non une bande horizontale de hauteur h. Cependant, nous n'avons pas encore étudié la question de la périodicité de tels pavages. Commençons par vérifier le fait suivant.

Question à développer pendant l'oral : Soit $\mathcal{T}$ un jeu de tuiles qui pave la bande horizontale $\mathcal{H}_1$. Montrez alors qu'il existe un pavage π_1 de $\mathcal{H}_1$ par $\mathcal{T}$ ainsi qu'un entier $M > 0$ tels que $\pi_1(i+M, 1) = \pi_1(i, 1)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On dit que π_1 est horizontalement périodique, de période horizontale M.
Généralisez au cas de la bande horizontale $\mathcal{H}_h$: si $\mathcal{T}$ pave $\mathcal{H}_h$, alors il existe un pavage horizontalement périodique de $\mathcal{H}_h$ par $\mathcal{T}$.

Question 8 *Pour chaque jeu de tuiles $\mathcal{T}$ ci-dessous, vérifiez s'il pave bien la bande $\mathcal{H}_1$ et donnez alors la plus petite période horizontale M qu'un pavage périodique de H_1 par $\mathcal{T}$ peut avoir. Si par contre $\mathcal{T}$ ne pave pas $\mathcal{H}_1$, marquez $\perp$.*
a) $\mathcal{T}_{10,12,10}$, ***b)*** $\mathcal{T}_{100,120,100}$, ***c)*** $\mathcal{T}_{1000,1200,1000}$.

D'après le résultat précédent, la périodicité horizontale est inévitable. Cependant, cela ne répond toujours pas à la question de la périodicité sur le plan complet.

Question à développer pendant l'oral : Soit $\mathcal{T}$ un jeu de tuiles qui pave la bande horizontale $\mathcal{H}_h$, et π_h un pavage horizontalement périodique de cette bande par $\mathcal{T}$. Nous notons M la période horizontale de π_h. En supposant que les couleurs sur les bords nord et sud de ce pavage coïncident (c'est-à-dire que $\pi_h(i,h)_\mathrm{N} = \pi_h(i,1)_\mathrm{S}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$), contruisez un pavage périodique du plan complet $\mathbb{Z}^2$ par $\mathcal{T}$. Quelle est la période de ce pavage ?

Supposons ainsi que nous disposons d'un jeu de tuiles $\mathcal{T}$ qui pave $\mathcal{H}_1$. Nous contruisons alors le jeu de tuiles $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ tel que toute tuile de $\mathcal{S}$ ait la même couleur au nord et au sud : $\mathcal{S} = \{\tau \in \mathcal{T} \mid \tau_\mathrm{N} = \tau_\mathrm{S}\}$.

Question à développer pendant l'oral : Montrez que si les tuiles de $\mathcal{S}$ ne sont pas toutes inutiles alors il existe un entier $M > 0$ et un pavage périodique du plan par $\mathcal{T}$ de période $(M, 1)$. La réciproque est-elle vraie ?
Généralisez cette remarque aux empilements de tuiles $\mathcal{T}^{(h)}$ pour $h > 1$, et déduisez-en un algorithme permettant de déterminer, pour un h donné, si un jeu de tuiles admet un pavage périodique du plan de période (M, N), où N divise h. Quelle est sa complexité en temps et en espace ?

Question 9 *Pour chacun des jeux de tuiles $\mathcal{T}$ et des hauteurs maximales h_max suivantes, indiquez si $\mathcal{T}$ admet un pavage périodique du plan de période (M, N) avec $N \leq h_\mathrm{max}$. Si oui, indiquez la plus petite période verticale N pour laquelle un tel pavage existe. Donnez aussi la période horizontale M minimale de ces pavages.*
a) *$\mathcal{T}_{10,3,10}$ et $h_\mathrm{max} = 30$,* ***b)*** *$\mathcal{T}_{30,7,100}$ et $h_\mathrm{max} = 20$,* ***c)*** *$\mathcal{T}_{100,13,1000}$ et $h_\mathrm{max} = 10$.*

$\diamondsuit$
$\diamondsuit \quad \diamondsuit$
$\diamondsuit$

Fiche réponse type: Pavages apériodiques

$\widetilde{\mathbf{u_0}}$ **:** 42

Question 1

a) $(2, 2, 4, 1)$

b) $(8, 42, 39, 23)$

c) $(157, 327, 365, 440)$

Question 2

a) 89, $(1, 1, 1, 5)$

b) 920, $(1, 1, 1, 3)$

c) 9439, $(1, 1, 1, 2)$

Question 3

a) 220, 3

b) 1825, 16

c) 17069, 4

Question 4

a) 96

b) 951

c) 9697

Question 5

a) 685, 567, oui

b) 4933, 0, non

c) 248730, 84064, oui

Question 6

a) 106

b) 1117

c) 11923

Question 7

a) 198, 123, oui

b) 84, 58, oui

c) 2, 4, oui

Question 8

a) $\perp$

b) 3

c) 6

Question 9

a) oui, $(M, N) = (1, 1)$

b) oui, $(M, N) = (1, 1)$

c) $\boxed{\text{oui, } (M, N) = (2, 4)}$

Fiche réponse: Pavages apériodiques

Nom, prénom, u_0: ....

Question 1

a)

b)

c)

Question 2

a)

b)

c)

Question 3

a)

b)

c)

Question 4

a)

b)

c)

Question 5

a)

b)

c)

Question 6

a)

b)

c)

Question 7

a)

b)

c)

Question 8

a)

b)

c)

Question 9

a)

b)

c)