Equilibres de Nash

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des Écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juin/Juillet 2013

ATTENTION !

N'oubliez en aucun cas de recopier votre u_0
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

Important.

Sur votre table est indiqué un numéro u_0 qui servira d'entrée à vos programmes. Les réponses attendues sont généralement courtes et doivent être données sur la fiche réponse fournie à la fin du sujet. À la fin du sujet, vous trouverez en fait deux fiches réponses. La première est un exemple des réponses attendues pour un $\widetilde{u_0}$ particulier (précisé sur cette même fiche et que nous notons avec un tilde pour éviter toute confusion!). Cette fiche est destinée à vous aider à vérifier le résultat de vos programmes en les testant avec $\widetilde{u_0}$ au lieu de u_0. Vous indiquerez vos réponses (correspondant à votre u_0) sur la seconde et vous la remettrez à l'examinateur à la fin de l'épreuve.

En ce qui concerne la partie orale de l'examen, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main ou bien à l'aide de la fiche réponse type fournie en annexe***. Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.

1 Préliminaires

On définit par récurrence $u_n = 15091 u_{n-1}$ modulo 64007. u_0 vous est donné (sur votre table) et doit être recopié sur votre fiche réponse. Des réponses types vous sont données à titre d'exemple pour un u_0 particulier. Il peut être pertinent de stocker dans un tableau les valeurs de u_n, tant leur utilisation répétée peut largement pénaliser vos algorithmes s'ils doivent recalculer cette suite de nombreuses fois.

Question 1 ***a)*** *Combien valent u_0, u_1, u_2 ?* ***b)*** *Combien valent u_3, u_4, u_5 ?* ***c)*** *Combien valent u_6, u_7, u_8 ?*

Etant donnés n et b, on génère la permutation $P_{n,b}$ de $\{0, \ldots, b-1\}$ comme suit :

- Soit $e = (0, 1, 2, ..., b-1)$ (ici, $longueur(e)$ vaut alors b ; les indices vont de 0 à $b-1$).
- Soit P la liste vide.
- Tant que e est non vide :
  - ajouter dans P l'élément de e d'index $i = (n \ modulo \ longueur(e))$. (les indices vont de 0 à $longueur(e) - 1$)
  - pour le même index i, effectuer $e(i) \leftarrow$ dernier élément de e.
  - diviser n par $longueur(e)$: $n \leftarrow n/longueur(e)$. On ne garde que la partie entière.
  - enlever le dernier élément de e.

Question à développer pendant l'oral : Prouver que cette procédure construit bien une permutation de $\{0, \ldots, b-1\}$. Quelle est sa complexité ? Quelle est la période de la fonction $n \mapsto P_{n,b}$?

Question 2 *Supposons $b = 4$.* ***a)*** *Quels sont les 3 premiers éléments de $P_{u(0),b}$?* ***b)*** *Quels sont les 3 premiers éléments de $P_{u(1),b}$?* ***c)*** *Quels sont les 3 premiers éléments de $P_{u(2),b}$?*

2 Définition du jeu Domineering

On définit le jeu dit "Domineering" comme suit :

- On a un tableau de N lignes et P colonnes, donc $N \times P$ cases vides. Les cases sont numérotées comme suit :

0,0	0,1	0,2	0,3
1,0	1,1	1,2	1,3
2,0	2,1	2,2	2,3
3,0	3,1	3,2	3,3
4,0	4,1	4,2	4,3

- Le joueur 1 dispose de dominos horizontaux, de taille 1×2 ; lorsqu'il joue en (i, j), il occupe les cases (i, j) et $(i, j+1)$.
- Le joueur 2 dispose de dominos verticaux, de taille 2×1 ; lorsqu'il joue en (i, j), il occupe les cases (i, j) et $(i+1, j)$.

- Les joueurs jouent à tour de rôle : le joueur 1 joue en premier, puis le joueur 2, puis le joueur 1, etc.
- Il est interdit de jouer sur une case occupée.
  - Le joueur 1 ne peut jouer en (i, j) que si les cases (i, j) et $(i, j + 1)$ sont libres.
  - Le joueur 2 ne peut jouer en (i, j) que si les cases (i, j) et $(i + 1, j)$ sont libres.
- Le premier joueur qui ne peut pas jouer, à son tour, a perdu.

3 Variantes du jeu Domineering

Le phantom-domineering (PD) est une modification comme suit :
- Chaque joueur fournit, d'emblée, toute la liste des coups qu'il souhaite jouer, dans leur ordre de priorité.
- Les joueurs n'ont pas accès à la liste fournie par le joueur adverse pour choisir leur propre liste ; les deux listes sont choisies séparément et privativement, sans espionnage par l'adversaire.
- À chaque tour, le premier coup légal parmi la liste des coups choisie par le joueur donné est joué. La liste peut être arbitrairement longue, mais il ne sert à rien d'avoir plusieurs fois le même couple (i, j) dans la liste ; le deuxième sera forcément illégal.
- La partie est jouée similairement au cas domineering ; en fait, la suite de coups est une partie légale de domineering. Si chaque joueur a proposé une liste de coups qui couvre tous les coups possibles, la partie est nécessairement complète, i.e. ne s'arrête pas avant que tous les coups légaux soient joués.

Une autre variante des différentes formes de domineering consiste à interdire certaines cases du jeu, dès le début. Les joueurs sont informés avant tout choix de quelles cases sont interdites.

4 Stratégies

Une stratégie pour jouer à un jeu peut être déterministe ou stochastique (comportant de l'aléatoire). Par exemple, pour phantom-domineering, plutôt que de simplement jouer une liste L_1 de coups, le joueur 1 peut décider de jouer L_1 avec probabilité p_1, L_2 avec probabilité p_2, L_3 avec probabilité p_3, ..., L_N avec probabilité p_n. Si le joueur 2, de son côté, joue L'_i avec probabilité p'_i pour $i \in \{1, N'\}$, la probabilité pour que le joueur 1 gagne devient

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N'} p_i p_j r_{i,j}$$

où
- $r_{i,j} = 1$ si le joueur 1 avec L_i gagne contre le joueur 2 avec L'_j ;
- $r_{i,j} = 0$ si le joueur 2 avec L'_j gagne contre le joueur 1 avec L_i.

On parle de stratégie pure pour le joueur 1 lorsque l'un des p_i vaut 1 (et donc tous les autres 0), et de stratégie mixte (ou stochastique) en cas contraire. On applique la même terminologie pour le joueur 2.

5 Index d'une stratégie

Pour le joueur 1, la colonne de droite n'a pas à être indexée ; on utilisera donc pour le joueur 1 une indexation à un nombre comme suit :

0	1	2	X
3	4	5	X
6	7	8	X
9	10	11	X
12	13	14	X

et le joueur 2 utilise une indexation similaire mais avec la dernière ligne supprimée au lieu de la dernière colonne :

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
X	X	X	X

Par commodité, on garde la même indexation lorsque certaines cases sont interdites.
L'index d'une stratégie du joueur 1 à PD (ou autre variante du jeu) est l'entier n tel que la stratégie soit $P_{u_n,b}$, avec b le nombre d'indices dans l'indexation des cases du joueur 1 (i.e. $b = 15$ dans l'exemple ci-dessus avec 5 lignes et 4 colonnes). On définit de même l'index d'une stratégie du joueur 2 (attention : b, nombre de cases légales a priori, n'est pas forcément le même pour les deux joueurs). Ceci va permettre de considérer des sous-ensembles de l'ensemble des permutations possibles, par exemple $P_{u_0,b}$, $P_{u_1,b}$,. . .,$P_{u_{99},b}$ pour avoir 100 stratégies pures considérées ; on appellera lPD (limited-Phantom-Domineering) cette variante.

Question 3 *On joue a PD en taille 5 (c'est-à-dire 5 lignes et 5 colonnes). Le joueur 1 joue la permutation d'index u_n, alors que le joueur 2 joue la permutation u_{2n}. Qui gagne si* ***a)*** $n = 1, n = 2, n = 3$ *?* ***b)*** $n = 4, n = 5, n = 6$ *?* ***c)*** $n = 7, n = 8, n = 9$ *?*

6 Equilibres de Nash

On considère des jeux à somme constante. Domineering et ses variantes sont de tels jeux. Cela signifie, dans le cadre simplifié utilisé ici, que lorsque l'un des joueurs gagne, l'autre perd. Même s'il n'y a pas d'ex-aequo possible, dès lors que des coups sont simultanés, ou que des informations sur le jeu sont cachées, il se peut qu'aucun des joueurs n'ait une stratégie gagnante à coup sûr ; il est connu que dans ce cas il existe une certaine valeur v, telle que

- le joueur 1 a une stratégie, possiblement stochastique, garantissant une probabilité v de victoire pour lui (quelle que soit la stratégie adoptée par le joueur 2) ;
- le joueur 2 a une stratégie, possiblement stochastique, garantissant une probabilité $1-v$ de victoire pour lui (quelle que soit la stratégie adoptée par le joueur 1).

Les stratégies (couples d'une stratégie du joueur 1 et d'une stratégie du joueur 2) réalisant cette valeur v réalisent les équilibres de Nash du jeu. On appelle v la valeur du jeu.
Question à développer pendant l'oral : Quelle est la valeur de PD avec $N = 2$ lignes et $P = 2$ colonnes ? et avec $N = P = 3$?
Dans la suite, on utilisera la notation log pour le logarithme népérien.
Une méthode classique pour calculer une valeur d'un jeu de manière approchée est comme suit :

- Soit A le nombre de stratégies pures du joueur 1 et B le nombre de stratégies pures du joueur 2. On compte ici toutes les stratégies telles qu'indexées précédemment.
- On construit une matrice M de taille $A \times B$ contenant à la case (i, j) un 1 si le joueur 1 gagne en jouant sa i-ème stratégie pure contre la j-ième stratégie pure du joueur 2, et contenant 0 à la case (i, j) si le joueur 1 perd en jouant sa i-ième stratégie pure contre la j-iÃÍme stratégie pure du joueur 2.
- On initialise v_1 et v_2 aux vecteurs nuls de tailles A et B respectivement.
- Soit $n_{max} = \lceil 1000(A + B) \log(A + B) \rceil$.
- Pour $n = 1, 2, 3, \ldots, n_{max}$
  - Soit $\eta_1 = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{\log(A)}{n_{max}A}}$.
  - Soit $\eta_2 = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{\log(B)}{n_{max}B}}$.
  - Soit $i_1 = i_1(n)$ tiré au sort, avec $i_1 = i$ avec probabilité
  $$p_1(i) = p_1(i, n) = \eta_1 + (1 - A\eta_1)\frac{\exp(\eta_1 v_1(i))}{\sum_{j=1}^{A} \exp(\eta_1 v_1(j))}.$$
  - Soit $i_2 = i_2(n)$ tiré au sort, avec $i_2 = i$ avec probabilité
  $$p_2(i) = p_2(i, n) = \eta_2 + (1 - B\eta_2)\frac{\exp(\eta_2 v_2(i))}{\sum_{j=1}^{B} \exp(\eta_2 v_2(j))}.$$
  - Soit $r_1 = 1$ si la stratégie pure i_1 du joueur 1 gagne contre la stratégie pure i_2 du joueur 2 et $r_1 = 0$ sinon.
  - Soit $r_2 = 1 - r_1$.
  - Mise à jour :
    - $v_1(i_1) \leftarrow v_1(i_1) + r_1/p_1(i_1, n)$.
    - $v_2(i_2) \leftarrow v_2(i_2) + r_2/p_2(i_2, n)$.
- Fournir, comme approximation de la valeur du jeu, la moyenne des r_1 sur les itérations ci-dessus.

Question 4 *On s'intéresse au tirage au sort d'un entier i avec probabilité p_i pour $i \in \{0, \ldots, N\}$. Définissons $p_{i,N} = u_i / \sum_{j=0}^{N-1} p_j$. Tirez au sort un grand nombre de x avec cette probabilitÃľ de distribution, i.e. $P(x = i) = p_{i,N}$. Quelle est la moyenne des $(u_{x_j})^2$ pour $j = 0, 1, 2, \ldots$ avec x_j tirés au sort selon cette distribution de probabilité (i.e. $P(x_j = i) = p_{i,N}$) si **a)** $N = 10$? **b)** $N = 100$? **c)** $N = 1000$?*

On pourra faire l'hypothèse que l'algorithme ci-dessus fournit une approximation satisfaisante avec bonne probabilité.
Question à développer pendant l'oral : Quelle est la complexité d'une itération de l'algorithme ci-dessus implémenté naïvement ? Voyez-vous une façon de faire exactement

la même chose en temps considérablement réduit ? La complexité pour la totalité des itérations ?
On pensera aussi à la complexité mémoire.
Question à développer pendant l'oral : Dans le cas général, la valeur d'un jeu peut être n'importe quel nombre réel entre 0 et 1, même si le jeu ne peut se solder que par une victoire ou une défaite. Proposez un algorithme simple pour détecter le cas où la valeur du jeu est exactement 0 ou exactement 1 ; quelle est sa complexité ?
On pourra comparer la complexité de cette méthode simple à la complexité de la méthode précédente (certes plus générale), et voir dans quel cas l'une ou l'autre, ou une combinaison des deux, fait du sens.
Dans toute la suite, on note $PD(...)$ la valeur du jeu correspondant.
Question à développer pendant l'oral : Comment déduire de l'algorithme ci-dessus une approximation d'un des équilibres de Nash ?

Question 5 ***a)*** *Quelle est la valeur du jeu où, lorsque le joueur 1 choisit la stratégie pure d'index i, avec $0 \leq i < 100$ et le joueur 2 choisit la stratégie pure d'index j, avec $0 \leq j < 100$, le joueur 1 gagne si $(i+j) \mod 2 = 1$?* ***b)*** *Quelle est la valeur du jeu où, lorsque le joueur 1 choisit la stratégie pure d'index i, avec $0 \leq i < 100$ et le joueur 2 choisit la stratégie pure d'index j, avec $0 \leq j < 100$, le joueur 1 gagne si $(i+j) \mod 2 = 0$?*

Question 6 *On appelle $iPD(N, P)$ le jeu PD avec N lignes et P colonnes avec une case rendue illégale a priori. Quelle est la valeur de* ***a)*** *$iPD(1,4), iPD(2,3)$?* ***b)*** *$iPD(3,2), iPD(2,4)$?* ***c)*** *$iPD(3,3), iPD(4,2)$? Dans les 3 cas, avec la case $(u(1000) \mod N, (u(1001)) \mod P)$ illégale.*

Question 7 *On considère désormais exclusivement les stratégies d'index < 100 (i.e. 100 stratégies sont considérés, avec index $u(0)$, $u(1)$,..., $u(99)$). Que valent :* ***a)*** *$lPD(3,5), lPD(4,4), lPD(5,3)$?* ***b)*** *$lPD(3,6), lPD(4,5), lPD(5,4)$?*

On ne demande pas une grande précision sur la question suivante ; on pourra réduire le nombre d'itérations et fournir une valeur approchée.

Question 8 *Idem Question 7, mais avec en prenant toutes les stratégies d'index < 10000 ; que valent alors :* ***a)*** *$lPD(3,5), lPD(4,4), lPD(5,3)$?* ***b)*** *$lPD(3,6), lPD(4,5), lPD(5,4)$?*

Question à développer pendant l'oral : Idées pour améliorer la méthode ?

◊
◊ ◊
◊

Fiche réponse type: Equilibres de Nash

$\widetilde{u_0}$: 17

Question 1

a) $17\ 519\ 23375$

b) $9548\ 9111\ 7065$

c) $46260\ 49318\ 48549$

Question 2

a) $1\ 3\ 2$

b) $3\ 0\ 1$

c) $3\ 2\ 1$

Question 3

a) $1\ 2\ 2$

b) $1\ 2\ 1$

c) $2\ 2\ 2$

Question 4

a) $1.67\ 10^9$

b) $2.07\ 10^9$

c) $1.99\ 10^9$

Question 5

a) $\simeq 1/2$

b) $\simeq 1/2$

Question 6

a) $\simeq 1,\ \simeq 0$

b) $\simeq 0,\ \simeq 1$

c) $\simeq 0.5,\ \simeq 1$

Question 7

a) $\simeq 1,\ \simeq 0.5,\ \simeq 0$

b) $\simeq 1,\ \simeq 0.5,\ \simeq 1$

Question 8

a) $\simeq 1,\ \simeq 1,\ \simeq 0$

b) $\simeq 1,\ \simeq 0,\ \simeq 1$

Fiche réponse: Equilibres de Nash

Nom, prénom, u_0: ....

Question 1

a)

b)

c)

Question 2

a)

b)

c)

Question 3

a)

b)

c)

Question 4

a)

b)

c)

Question 5

a)

b)

Question 6

a)

b)

c)

Question 7

a)

b)

Question 8

a)

b)