Mikado

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juillet 2011

ATTENTION !

N'oubliez en aucun cas de recopier votre u_0
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

Important.

Sur votre table est indiqué un numéro u_0 qui servira d'entrée à vos programmes. Les réponses attendues sont généralement courtes et doivent être données sur la fiche réponse fournie à la fin du sujet. À la fin du sujet, vous trouverez en fait deux fiches réponses. La première est un exemple des réponses attendues pour un $\widetilde{u_0}$ particulier (précisé sur cette même fiche et que nous notons avec un tilde pour éviter toute confusion!). Cette fiche est destinée à vous aider à vérifier le résultat de vos programmes en les testant avec $\widetilde{u_0}$ au lieu de u_0. Vous indiquerez vos réponses (correspondant à votre u_0) sur la seconde et vous la remettrez à l'examinateur à la fin de l'épreuve.

En ce qui concerne la partie orale de l'examen, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main ou bien à l'aide de la fiche réponse type fournie en annexe***. Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.

1 Génération de segments

Considérons la suite d'entiers $(u_k)_k$ définie par

$$u_{k+1} = 15091 \times u_k \mod 64007.$$

On s'assurera de précalculer et stocker suffisamment de valeurs de u_k de manière à pouvoir y accéder en temps constant par la suite.

Un mikado désigne ici un carré et un ensemble de segments qui touchent les deux bords gauche et droit de ce carré. Les mikados sont paramétrés par un entier N. Cet entier désigne à la fois le nombre de segments du mikado et sa taille. Ainsi, pour un N donné, le mikado correspondant sera un carré de taille $N \times N$ contenant N segments $(S_{N,i})_{0 \leq i < N}$. Le coin en haut à gauche du carré est l'origine $(0, 0)$, le coin en bas à droite a pour coordonnées (N, N). Le segment $S_{N,i}$ relie le point d'ordonnée $g_{N,i}$ sur le côté gauche du carré au point d'ordonnée $d_{N,i}$ sur le côté droit. Les ordonnées $g_{N,i}$ et $d_{N,i}$ sont données par

$$\begin{aligned} g_{N,i} &= (u_{10N+2i+0} \mod (N-1)) + 1, \\ d_{N,i} &= (u_{10N+2i+1} \mod (N-1)) + 1. \end{aligned}$$

La sujet nécessitera, entre autres choses, de calculer les points d'intersection entre droites. Il est déconseillé d'effectuer ces calculs de façon approchée (par exemple en arithmétique à virgule flottante) ; cela risquerait de gêner la détection des cas où trois droites ou plus sont concourantes. Il est préférable de représenter les coordonnées par des fractions rationnelles (paires d'entiers) dont le dénominateur est strictement positif.

Question 1 *En notant x l'abscisse et y l'ordonnée (du haut vers le bas), quelles sont les équations des segments suivants pour $N = 100$?* ***a)*** $S_{N,0}$ *?* ***b)*** $S_{N,1}$ *?* ***c)*** $S_{N,2}$ *?*

Remarque : votre valeur de u_0 est choisie de telle sorte que les N segments $(S_{N,i})_{0 \leq i < N}$ soient différents, et cela pour chacune des valeurs de N qui apparaissent dans la suite du sujet. Le cas dégénéré où deux segments sont superposés pourra donc être ignoré sans risque dans les algorithmes.

Question à développer pendant l'oral : Quel algorithme pourriez-vous utiliser pour vérifier cette remarque ? Quelle serait sa complexité en temps et en espace ?

2 Coloriage d'un mikado

Dans un mikado, les segments partitionnent le carré en polygones convexes qu'on appellera secteurs. On choisit pour chaque secteur une couleur telle que deux secteurs ayant une arête en commun portent des couleurs différentes. Deux secteurs de même couleur peuvent par contre partager un même sommet. Les couleurs portent des numéros 1, 2, 3, ... Le secteur contenant les points d'ordonnée 0 portera la couleur 1. Par convention, les points situés sur les segments ne portent pas de couleur, ce que l'on pourra exprimer en utilisant 0 comme numéro de couleur.

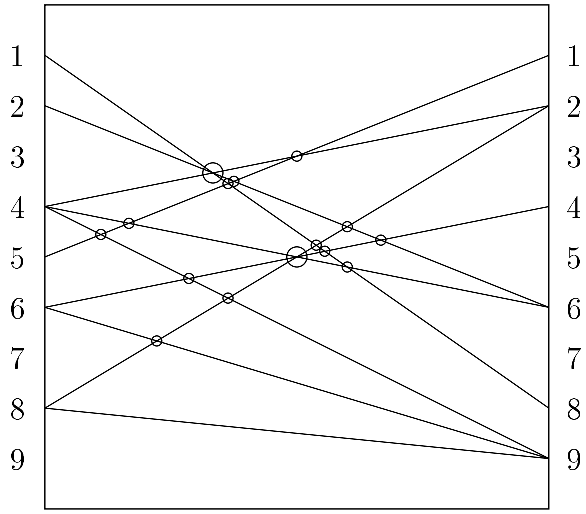

FIGURE 1 – Mikado pour $u_0 = 1673$ et $N = 10$. Les nœuds du schéma sont marqués d'un cercle. Les gros cercles indiquent des nœuds où se croisent 3 segments ou plus.

Question à développer pendant l'oral : Justifiez rapidement qu'il existe un coloriage du mikado n'utilisant que deux couleurs et que ce coloriage est unique. Comment évolue la couleur d'un point du mikado si l'on ajoute un segment supplémentaire ?

Question 2 *Quelle est la couleur du point de coordonnées* $(78N/139, 78N/139)$ *pour* ***a)*** $N = 10$ *?* ***b)*** $N = 20$ *?* ***c)*** $N = 50$ *?*

3 Nœuds d'un mikado

Question 3 *Combien de paires de segments* $(S_{N,i}, S_{N,j})$ *(avec* $0 \leq i < j < N$*) ont une intersection strictement à l'intérieur du carré* $N \times N$ *pour* ***a)*** $N = 10$ *?* ***b)*** $N = 20$ *?* ***c)*** $N = 50$ *?*

L'intersection de deux segments ou plus à l'intérieur du carré définit un nœud. Remarque : trois segments ou plus peuvent se croiser en un même point du mikado et il y a donc moins de nœuds que de paires de segment qui se croisent dans le carré.

Le point (x_1, y_1) est plus petit que le point (x_2, y_2) pour l'ordre lexicographique si leurs coordonnées vérifient

$$x_1 < x_2 \text{ ou } (x_1 = x_2 \text{ et } y_1 < y_2).$$

Question 4 *Quelles sont les coordonnées (sous forme de fractions rationnelles) du plus petit nœud pour* ***a)*** $N = 10$ *?* ***b)*** $N = 20$ *?* ***c)*** $N = 50$ *? Dans vos réponses, les numérateurs et dénominateurs des fractions n'ont pas besoin d'être premiers entre eux.*

Question 5 *Combien y a-t-il de nœuds pour* ***a)*** $N = 10$ *?* ***b)*** $N = 20$ *?* ***c)*** $N = 50$ *?*

Question à développer pendant l'oral : Quelle est la complexité en temps et en espace de votre algorithme ?

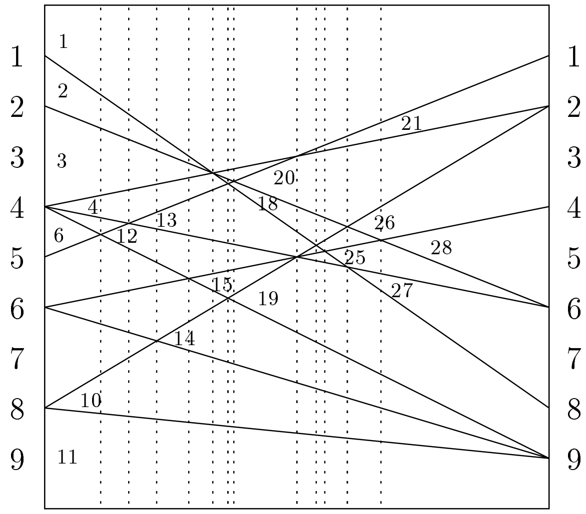

Figure 2 – Mikado pour $u_0 = 1673$ et $N = 10$. Les lignes pointillées délimitent les tranches verticales. Les nombres sont les numéros de quelques secteurs.

Les sommets des secteurs du mikado se trouvent, soit sur le bord du carré, soit aux nœuds. Remarquez que, si n segments se croisent en un nœud, alors ce nœud est nécessairement un sommet pour $2n$ secteurs différents. Il y a un secteur au-dessus du nœud, un au dessous, $n-1$ sur sa gauche et $n-1$ sur sa droite. Déduisez en un moyen de calculer le nombre de secteurs du mikado.

Question 6 *Combien y a-t-il de secteurs pour* ***a)*** $N = 10$ *?* ***b)*** $N = 20$ *?* ***c)*** $N = 50$ *?*

4 Tranches d'un mikado

Il est possible de découper le carré en plusieurs tranches verticales dont les bords passent par un ou plusieurs nœuds du mikado. Les tranches sont numérotées par abscisse croissante (de gauche à droite), la première ayant le numéro 1.

Question 7 *Quel est le numéro de la tranche contenant les points d'abscisse* $78N/139$ *pour* ***a)*** $N = 10$ *?* ***b)*** $N = 20$ *?* ***c)*** $N = 50$ *?*

Les N segments du mikado partitionnent chaque tranche en $N+1$ sous-secteurs triangulaires ou trapézoïdaux. Ces sous-secteurs sont classés par tranche croissante, et dans chaque tranche par ordonnées croissantes. Ainsi, le tout premier sous-secteur est celui qui contient le point $(0, 0)$. Celui juste au-dessous est le deuxième, tandis que celui juste à sa droite ne sera visité qu'une fois que tous les sous-secteurs de la première tranche auront été visités.
Les secteurs sont numérotés par rapport à l'ordre dans lequel l'un de leurs sous-secteurs est visité pour la première fois. Ainsi, si k secteurs ont déjà été numérotés et que le prochain sous-secteur appartient à un secteur qui ne porte pas encore de numéro, ce secteur prend le numéro $k+1$. Le tout premier secteur, celui qui contient le point $(0, 0)$, porte le numéro 1.

Question 8 *Quels sont les numéros des cinq premiers secteurs (par ordonnées croissantes) empilés dans la tranche contenant les points d'abscisse $78N/139$ pour* ***a)*** $N = 10$ *?* ***b)*** $N = 20$ *?* ***c)*** $N = 50$ *?*

Deux secteurs sont voisins s'ils sont de part et d'autre d'une même arête. Cela signifie aussi qu'ils ont deux nœuds en commun.

Question 9 *Combien y a-t-il de secteurs possédant exactement 4 voisins pour* ***a)*** $N = 10$ *?* ***b)*** $N = 20$ *?* ***c)*** $N = 50$ *?*

Question à développer pendant l'oral : Quelle est la complexité en temps et en espace de votre algorithme ?

Fiche réponse type: Mikado

$\widetilde{u_0}$: 1673

Question 1

a) y = -24/100 x + 51

b) y = 24/100 x + 38

c) y = -29/100 x + 49

Question 2

a) 2

b) 1

c) 2

Question 3

a) 19

b) 77

c) 578

Question 4

a) (10/9, 41/9)

b) (20/12, 127/12)

c) (50/42, 1397/42)

Question 5

a) 15

b) 69

c) 544

Question 6

a) 28

b) 94

c) 611

Question 7

a) 11

b) 23

c) 226

Question 8

a) 1, 21, 20, 18, 24

b) 1, 36, 57, 61, 56

c) 1, 60, 136, 387, 289

Question 9

a) 9

b) 33

c) 287

$\diamond$ $\diamond$ $\diamond$ $\diamond$

Fiche réponse: Mikado

Nom, prénom, u_0: ....

Question 1

a)

b)

c)

Question 2

a)

b)

c)

Question 3

a)

b)

c)

Question 4

a)

b)

c)

Question 5

a)

b)

c)

Question 6

a)

b)

c)

Question 7

a)

b)

c)

Question 8

a)

b)

c)

Question 9

a)

b)

c)