Pyraminx

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juin/Juillet 2010

ATTENTION !

N'oubliez en aucun cas de recopier votre u_0
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

Important.

Sur votre table est indiqué un numéro u_0 qui servira d'entrée à vos programmes. Les réponses attendues sont généralement courtes et doivent être données sur la fiche réponse fournie à la fin du sujet. À la fin du sujet, vous trouverez en fait deux fiches réponses. La première est un exemple des réponses attendues pour un $\widetilde{u_0}$ particulier (précisé sur cette même fiche et que nous notons avec un tilde pour éviter toute confusion!). Cette fiche est destinée à vous aider à vérifier le résultat de vos programmes en les testant avec $\widetilde{u_0}$ au lieu de u_0. Vous indiquerez vos réponses (correspondant à votre u_0) sur la seconde et vous la remettrez à l'examinateur à la fin de l'épreuve.

En ce qui concerne la partie orale de l'examen, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main ou bien à l'aide de la fiche réponse type fournie en annexe***. Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.

Avertissement

Attention ce sujet est assez long à lire et comporte de nombreuses conventions qu'il conviendra de respecter afin de trouver les résultats demandés. Prenez le temps de bien lire le sujet dans son entier avant de commencer à programmer.

1 Introduction et notations

Le pyraminx est un casse-tête similaire au célèbre Rubik's Cube. Le pyraminx a été inventé par Uwe Mèffert au début des années 80. Il se présente sous la forme d'un tétraèdre dont chacune des quatre faces est découpée en 9 triangles. Chacun de ces triangles porte une couleur (parmi quatre). Il est possible de faire subir un certain nombre de mouvements (qui sont détaillés plus loin) au pyraminx. Partant d'un état quelconque du pyraminx, le but du puzzle est de reconstituer l'état dans lequel chacune des faces du tétraèdre est colorée de manière uniforme (les 9 triangles qui la composent portent la même couleur). Ceci est toujours possible, mais le nombre de mouvements à imprimer au pyraminx dépend de l'état de départ. Le but de cette épreuve est d'étudier ce casse-tête d'un point de vue algorithmique.

1.1 Nommage des faces et des triangles les composant

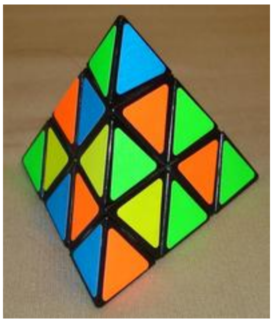
Afin de résoudre algorithmiquement ce casse-tête, nous allons introduire des notations décrivant à la fois les différentes pièces du pyraminx, ainsi que les mouvements possibles. La figure 1(a) est une photo d'un véritable pyraminx. Elle vous permet de visualiser la représentation réelle du casse-tête. La figure 1(b) quant à elle fixe la notation des quatre faces du pyraminx :

- base ;
- face gauche ;
- face droite ;
- face arrière.

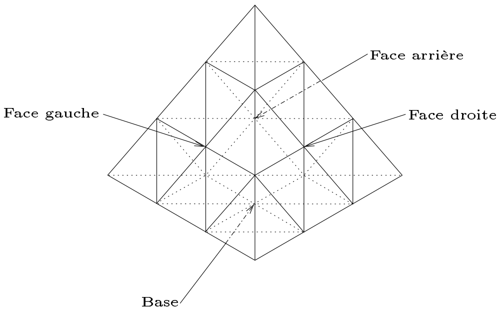
On notera $\mathcal{F}$ l'ensemble des faces du pyraminx. On a $\mathcal{F} = \{base, gauche, droite, arriere\}$. On équipe cet ensemble d'une relation d'ordre total notée $\prec$ sur ses éléments et définie par $base \prec gauche \prec droite \prec arriere$.

Dans la suite de l'énoncé, on imaginera que le pyraminx reste dans la position représentée par la figure 1(b). Cela signifie que, en dehors des pièces concernées par un des mouvements (définis plus loin), les autres pièces restent fixes. Notons que ceci n'est en général pas vrai lorsque le pyraminx est manipulé physiquement par un être humain.

Le pyraminx est constitué d'un certain nombre de pièces (au sens mécanique) qui seront détaillées plus loin (cf paragraphe 2.2). Chacune de ces pièces comportent un certain nombre de facettes colorées. Ces facettes colorées (de forme triangulaire) sont regroupées en quatre séries de neuf qui constituent chacune une des faces du pyraminx. La figure 2(a) illustre le nommage des 9 facettes associées à une face. Pour une face, son ensemble de facettes est appelé $\mathcal{T} = \{h, mg, mc, md, bg, bcg, bc, bcd, bd\}$. On équipe cet ensemble d'un

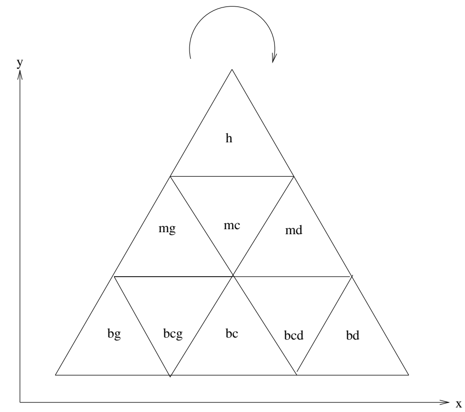


(a) Photographie du pyraminx.

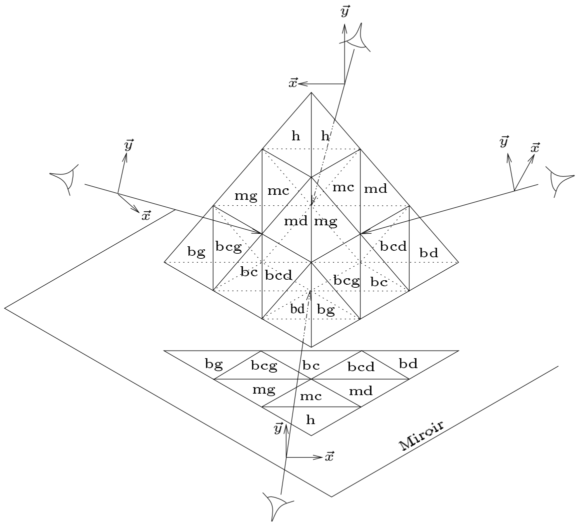


(b) Modélisation du pyraminx.

Figure 1 – Le pyraminx



(a) Nommage des triangles d'une face du pyraminx vue dans son orientation canonique.



(b) Nommage des triangles du pyraminx pour l'ensemble des faces.

Figure 2 – Notations des pièces.

ordre total noté $\prec$[1] et défini par $h \prec mg \prec mc \prec md \prec bg \prec bcg \prec bc \prec bcd \prec bd$.
On a représenté cette face dans son orientation canonique donnée par le repère $(\vec{x}, \vec{y})$. Sur cette figure, on a aussi fait figurer l'orientation associée aux rotations effectuées dans le sens horaire. La figure 2(b) illustre ce nommage étendu à l'ensemble des faces. Le nommage est complètement déterminé par la donnée de l'orientation de chacune des faces. Le nommage des facettes est explicitement donné pour toutes les faces sauf celle arrière.
L'ensemble des couleurs possibles pour une facette est noté $\mathcal{C} = \{rouge, verte, bleue, jaune\}$.
La configuration complète d'une face est la donnée de la couleur de chacune des neuf facettes qui la composent dans l'ordre croissant induit par la relation d'ordre total $\prec$ sur l'ensemble $\mathcal{T}$. C'est donc un élément (9-uplet) de l'ensemble $\mathcal{C}^9$. Par extension, une configuration complète du pyraminx est la donnée d'une configuration pour chacune des faces du pyraminx, dans l'ordre croissant induit par la relation d'ordre total $\prec$ sur l'ensemble des faces $\mathcal{F}$. Une configuration complète ϵ est donc un élément de $\mathcal{E} = (\mathcal{C}^9)^4$.
Lorsque dans le sujet, il vous sera demandé dans une question de donner une configuration complète du pyraminx, vous devrez énoncer les 36 couleurs qui composent le 36-uplet sous la forme abrégée suivante :

$$\left(\underbrace{(R, V, B, R, R, B, V, V)}_{\text{configuration de la base}}, \ldots, \underbrace{(B, V, R, V, V, J, R, B, B)}_{\text{configuration de la face arrière}}\right)$$

où R désigne la couleur *rouge*, V désigne la couleur *verte*, B désigne la couleur *bleue* et J désigne la couleur *jaune*

1.2 Configuration du pyraminx résolu.

On rappelle que, résoudre le casse-tête du pyraminx, c'est parvenir en partant d'une configuration initiale quelconque à revenir dans un état où l'ensemble des faces ont une coloration uniforme. On notera ϵ_0 la configuration dans laquelle :
- la face de *base* est de couleur *rouge* ;
- la face de *gauche* est de couleur *verte* ;
- la face de *droite* est de couleur *bleue* ;
- la face de *arriere* est de couleur *jaune* ;

Avec la notation introduite précédemment, il s'agit donc de la configuration notée :

$$\left(\underbrace{(R, \ldots, R)}_{\text{9 fois}}, \underbrace{(V, \ldots, V)}_{\text{9 fois}}, \underbrace{(B, \ldots, B)}_{\text{9 fois}}, \underbrace{(J, \ldots, J)}_{\text{9 fois}}\right)$$

1.3 Nommage des mouvements légaux applicables au pyraminx

Nous détaillons dans cette section l'ensemble des mouvements applicables au pyraminx. De manière générale, un mouvement applicable au pyraminx consiste en la rotation d'un

1. Par un abus de langage, on utilisera la même notation pour tous les ordres totaux introduits dans le sujet. Le contexte permet facilement de lever toute ambiguïté.

angle égal à $\pm\frac{2\pi}{3}$ d'une ou plusieurs pièces mécaniquement solidaires dans un sens de rotation donné. Deux sens de rotation peuvent être considérés :
– le sens horaire ;
– le sens anti-horaire.
L'ensemble des sens de rotations sera noté $\mathcal{R} = \{r_{-1}, r_{+1}\}$ où r_{+1} désignera le sens de rotation horaire. Là encore on définit un ordre total sur les éléments de $\mathcal{R}$. Par un léger abus de langage, on notera $\prec$ cet ordre total défini par $r_{-1} \prec r_{+1}$. Notons par ailleurs que chaque mouvement dans un sens peut-être annulé par le même mouvement en sens opposé. On définit l'application rotation inverse qui à une rotation donnée r associe sa rotation inverse notée r^{-1}. On a évidemment :

$$\begin{cases} (r_{-1})^{-1} & = & r_{+1} \\ (r_{+1})^{-1} & = & r_{-1} \end{cases}$$

Notez qu'une telle rotation peut aussi être inversée par son application itérée deux fois.
Un mouvement est donc caractérisé par la donnée de l'ensemble des pièces mises en mouvement et le sens de rotation du mouvement. À chacune des quatre faces du pyraminx, on associe une famille de trois mouvements :

1. rotation de la face entière (noté n^0 ci-après) ;
2. rotation du sommet du tétraèdre opposé à la face considérée (noté n^2 dans la suite) ; On appellera sommets du pyraminx les pièces mises en mouvement par cette famille de mouvements.
3. rotation du tétraèdre tronqué formé par les pièces comprises entre la face considérée et le sommet opposé (noté n^1).

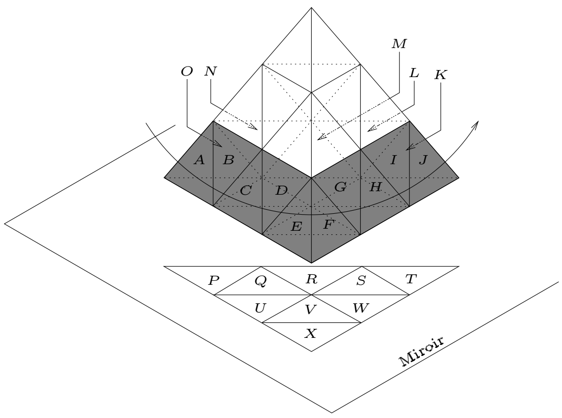
On appellera niveau chacun de ces mouvements. On notera $\mathcal{N} = \{n^0, n^1, n^2\}$ l'ensemble des niveaux. Là encore on équipera cet ensemble d'une relation d'ordre total notée $\prec$ et définie par $n^0 \prec n^1 \prec n^2$.
Si l'on considère les quatre faces du pyraminx, les trois niveaux et les deux sens de rotation possibles, il y a donc 24 mouvements possibles. Cet ensemble de mouvement sera noté $\mathcal{M}$. Un mouvement $m \in \mathcal{M}$ sera formellement décrit par le triplet (f, n, r) où $f \in \mathcal{F}$, $n \in \mathcal{N}$ et $r \in \mathcal{R}$.
La figure 3(a) illustre l'état du pyraminx avant application du mouvement $(\text{base}, n^0, r_{+1})$, cependant que la figure 3(b) illustre son état après son application. Les couleurs portées par les facettes ont été indiquées par des lettres. Les figures 3(c) et 3(d) illustrent l'application du mouvement $(\text{base}, n^1, r_{+1})$. Et finalement les figures 3(e) et 3(f) illustrent l'application du mouvement $(\text{base}, n^2, r_{+1})$.

1.4 Ordre lexicographique

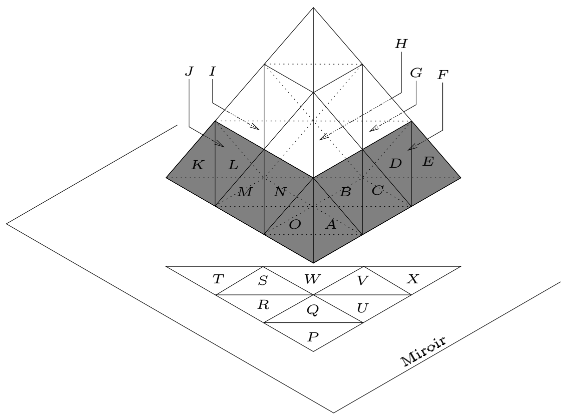
Soit $A, \prec_A$ et $B, \prec_B$ deux ensembles équipé chacun d'une relation d'ordre total. On étend les deux relations d'ordre total définies sur A et B, à l'ensemble des couples $(a, b) \in A \times B$, en définissant $\prec$ comme :

$$\forall\, (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B \quad (a_1, b_1) \prec (a_2, b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \prec_A a_2 \\ \text{ou } \ (a_1 = a_2 \text{ et } b_1 \prec_B b_2) \end{cases}$$

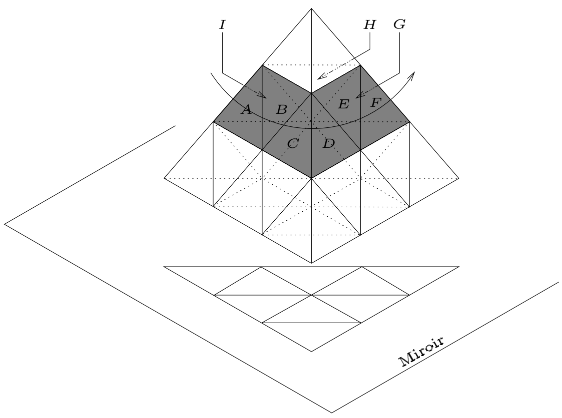
Ceci peut s'étendre à des produits cartésiens de $n \geq 2$ ensembles équipé chacun d'une relation d'ordre total.



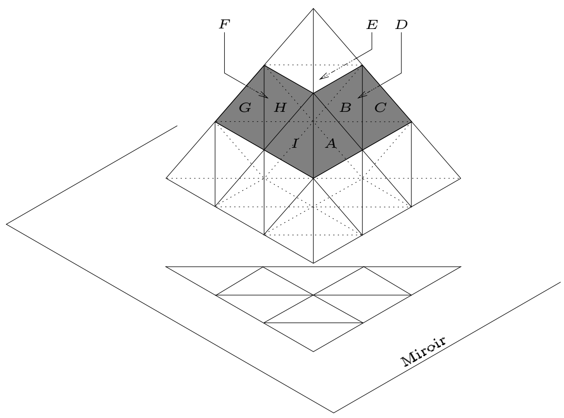
(a) État du pyraminx avant application du mouvement $(\text{base}, n^0, r_{+1})$.



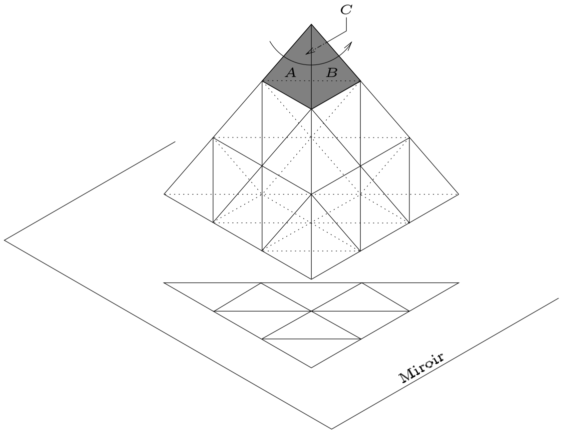
(b) État du pyraminx après application du mouvement $(\text{base}, n^0, r_{+1})$.



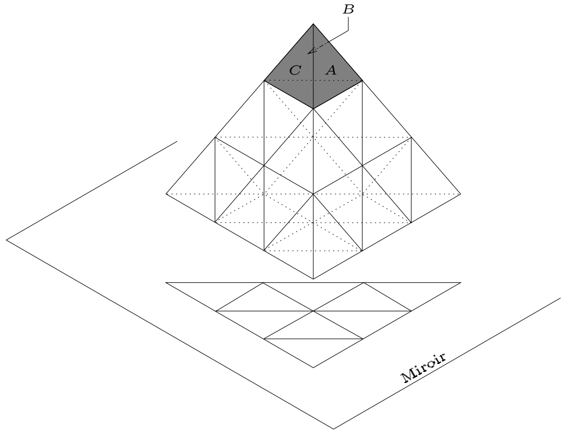
(c) État du pyraminx avant application du mouvement $(\text{base}, n^1, r_{+1})$.



(d) État du pyraminx après application du mouvement $(\text{base}, n^1, r_{+1})$.



(e) État du pyraminx avant application du mouvement $(\text{base}, n^2, r_{+1})$.



(f) État du pyraminx après application du mouvement $(\text{base}, n^2, r_{+1})$.

Par conséquent on peut définir une relation d'ordre notée $\prec_{\mathcal{M}}$ pour l'ensemble $\mathcal{M} = \mathcal{F} \times \mathcal{N} \times \mathcal{R}$ des configurations complètes.

2 Représentation compacte

2.1 Remarques préliminaires

Afin de résoudre le casse-tête du pyraminx, il est nécessaire de diminuer l'explosion combinatoire résultant de l'application itérée des 24 mouvements possibles au pyraminx. Pour cela nous constatons plusieurs faits :

- Les sommets ne participent pas à la complexité du casse-tête. Il suffit de résoudre le casse-tête pour l'ensemble des facettes autres que celles portées par les quatre sommets du tétraèdre, puis d'appliquer les mouvements du type $(\_, n^2, r_{+1})$ adéquats pour résoudre finalement le casse-tête[2]. Ici _ remplace n'importe laquelle des valeurs possibles.
- Il est donc inutile de se préoccuper de l'état des facettes associées aux quatre sommets. Aussi peut-on ignorer les huit mouvements du type $(\_, n^2, \_)$.
- Si l'on ne considère plus les sommets du pyraminx, alors appliquer un mouvement m du type (f, n^0, r) conduit à une configuration complète identique à celle obtenue après une rotation complète du tétraèdre dans l'espace selon le même axe et dans le même sens que m, puis à appliquer un mouvement $\overline{m} = (f, n^1, r^{-1})$.
- Sans perte de généralité, on peut donc se contenter des configurations obtenues après applications des huit mouvements du type $(\_, n^1, \_)$ afin d'explorer les combinaisons possibles du casse-tête (à une rotation dans l'espace près).

2.2 Pièces mécaniquement solidaires

Pour la suite, on ne considérera donc plus que ces huit mouvements. On notera $\mathcal{M}_1$ l'ensemble des mouvements du type $(\_, n^1, \_)$. $\mathcal{M}_1$ est naturellement équipé d'une relation d'ordre total qui est définie comme la restriction de l'ordre total $\prec_{\mathcal{M}}$ sur $\mathcal{M}$ à son sous-ensemble propre $\mathcal{M}_1$.

Question à développer pendant l'oral : Expliquez pourquoi lorsque l'on se limite à ces huit mouvements la configuration du pyraminx résolu est unique[3].

Si l'on s'intéresse aux pièces[4] qui constituent mécaniquement le pyraminx, on se rend compte qu'il en existe deux types :

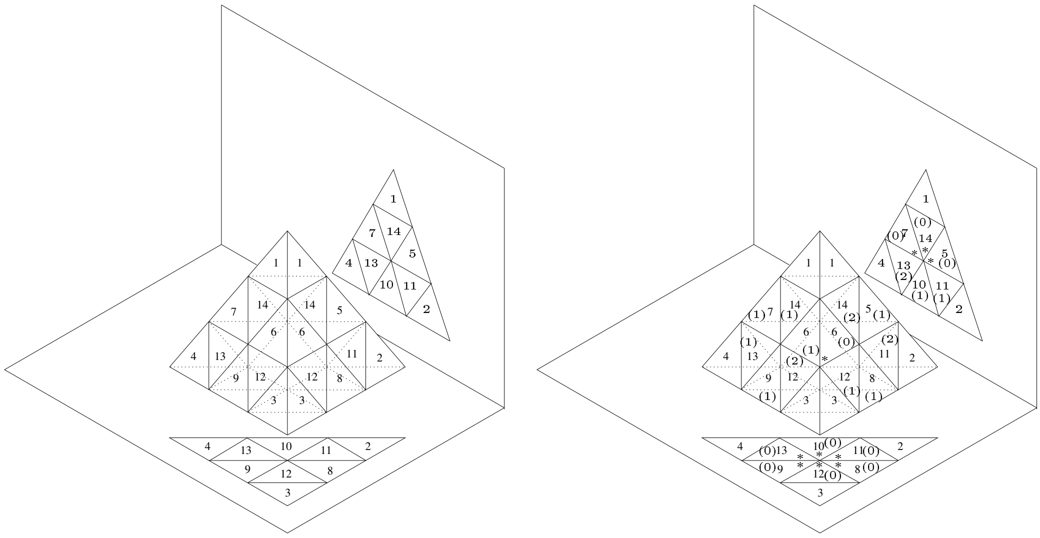
- six pièces composées de deux facettes colorées. Ce sont les pièces numérotées de 5 à 10 dans la figure 3(g) ;
- quatre pièces composées de trois facettes colorées. Ce sont les pièces numérotées de 11 à 14 dans la figure 3(g).

2. Cela est si vrai qu'il existe une version commerciale du pyraminx où ces quatre éléments ont été tronqués.

3. Lorsque l'on s'interdit de tourner le pyraminx lui-même dans l'espace.

4. Sans prendre compte les sommets du pyraminx.

Notez que sur la figure 3(g), nous avons fait figurer et numéroté les quatre sommets (comportant trois facettes chacun).



(g) Numérotation des pièces pour une configuration initiale donnée.

(h) Sélection des facettes servant de références pour l'orientation des pièces.

FIGURE 3 – Convention de nommage des pièces mécaniques.

Les facettes de ces pièces sont mécaniquement solidaires. Cela signifie que l'ordre dans lequel apparaissent les couleurs de leurs facettes est immuable. On notera $\mathcal{P}$ l'ensemble de ces pièces. Cet ensemble est partitionné en deux sous-ensembles $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ c'est-à-dire que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 \bigcup \mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_2 \bigcap \mathcal{P}_3 = \emptyset$. $\mathcal{P}_2 = \{p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}\}$ représente l'ensemble les 6 pièces composées de deux facettes colorées. Quant à $\mathcal{P}_3 = \{p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}\}$ il désigne l'ensemble des pièces possédant 3 facettes colorées. On équipe $\mathcal{P}_2$ d'une relation d'ordre total notée $\prec$ et définie par : $p_5 \prec p_6 \prec p_7 \prec p_8 \prec p_9 \prec p_{10}$. De même on équipe $\mathcal{P}_3$ d'une relation d'ordre total notée $\prec$ et définie par : $p_{11} \prec p_{12} \prec p_{13} \prec p_{14}$.

En partant d'une configuration complète initiale donnée (par exemple ϵ_0), la figure 3(g) numérote les pièces qui sont solidaires mécaniquement. Lors de l'application de mouvements possibles (dans l'ensemble $\mathcal{M}_1$) ces pièces vont voir leurs positions respectives et éventuellement leurs orientations modifiées. Il est donc nécessaire de choisir des conventions pour l'orientation des pièces. En ce que qui concerne les pièces possédant deux facettes, elles ne peuvent avoir que deux orientations possibles. On note $\mathcal{O}_2 = \{0, 1\}$ l'ensemble des orientations possibles. Initialement les pièces sont par convention orientées dans l'orientation 0. Celle-ci est matérialisée par :

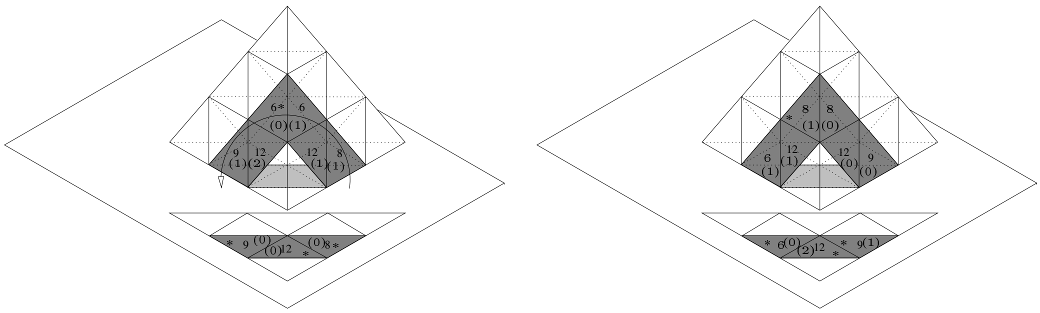
- une marque symbolisée par une étoile ($\star$) sur la figure 3(h). Ces marques sont fixes, elles n'accompagnent pas les pièces lors de leur mouvement. Par exemple la marque donnant l'orientation de la pièce p_6 sur la figure 3(h) reste solidaire de la position mg de la face droite quelque soit les mouvements appliqués.
- un entier indiqué entre parenthèse. Cette marque se déplace avec la facette d'une pièce lors de son mouvement.

L'orientation d'une pièce est alors simplement l'entier qui concorde avec une marque ($\star$).
En ce qui concerne les pièces possédant trois facettes, celles-ci peuvent exhiber trois orien-

tations possibles. On notera $\mathcal{O}_3 = \{0, 1, 2\}$ ces trois orientations. Là encore on prendra comme convention que dans l'état initial choisi (par exemple ϵ_0) l'orientation de ces pièces est l'orientation canonique 0. La convention pour repérer l'orientation est la même que précédemment.

2.3 Effets des mouvements sur les pièces

Chacun des 8 mouvements va potentiellement modifier les positions et les orientations des pièces. La figure 4 illustre une configuration des pièces du pyraminx avant application du mouvement $m = (arriere, n^1, r_{+1})$. La figure 4(b) illustre l'état du pyraminx après application du mouvement m. On constate tout d'abord que seules les pièces p_6, p_8, p_9 et p_{12} ont été impactées. La pièce p_{12} a seulement vue son orientation modifiée, alors que les pièces p_6, p_8, p_9 ont subi une permutation, ainsi qu'éventuellement des changements d'orientation.



(a) État des pièces mécaniques dans une configuration initiale. Les orientations sont mentionnées.

(b) État après application du mouvement m.

FIGURE 4 – Effet de l'application du mouvement $m = (arriere, n^1, r_{+1})$.

Vous vérifierez que l'état du pyraminx après un mouvement est complètement spécifié par :
- la position des pièces à deux facettes situées sur les positions repérées par des $\star$ sur la figure 3(h)
- les orientations respectives de ces pièces,
- les orientations des quatre pièces à trois facettes.

Par exemple la configuration du pyraminx dans la figure 4(a) est donnée par :
- Les pièces p_5, p_6, p_7, p_8, p_9 et p_{10} sont dans leurs positions initiales.
- Les orientations de ces mêmes pièces est 0.
- Les orientations des pièces $\mathcal{P}_3$ est 0.

Elle est devenue après application du mouvement m (figure 4(b)) :
- Les pièces de $\mathcal{P}_2$ sont maintenant dans l'ordre $(p_5, p_8, p_7, p_9, p_6, p_{10})$ (on entend par là par exemple que la pièce p_8 occupe la place initialement occupée par p_6.).
- L'orientation de ces mêmes pièces est $(0, 0, 0, 1, 1, 0)$ (dans l'ordre croissant allant de p_5 à p_{10}).
- L'orientation des pièces $\mathcal{P}_3$ est $(0, 2, 0, 0)$ (dans l'ordre croissant allant de p_{11} à p_{14}).

2.4 Permutations

Soit $(E, <)$ un ensemble fini de cardinal n muni d'une relation d'ordre total $<$. On pose $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ avec $e_1 < e_2 < \ldots < e_n$. Une permutation σ agissant sur un ensemble fini E, est une bijection de E dans E. σ définit un réordonnancement des éléments de E. On peut représenter σ en donnant l'image des éléments de E par σ dans l'ordre total défini par $<$, c'est-à-dire $\sigma = (\sigma(e_1), \sigma(e_2), \ldots, \sigma(e_n))$. On note Σ_E l'ensemble des permutations agissant sur l'ensemble E. On étend la relation d'ordre total $<$ sur E en une relation [5] d'ordre total notée $\prec$ sur Σ_E définie par :

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_E \quad \sigma_1 \prec \sigma_2 \Leftrightarrow \exists i \in [0, n-1] \mid \forall j < i \quad \sigma_1(e_j) = \sigma_2(e_j) \text{ et } \sigma_1(e_i) < \sigma_2(e_i).$$

2.5 Configuration compacte

On peut formaliser les remarques précédentes en définissant le concept de configuration compacte afin de décrire l'état du pyraminx. Plus précisément, on appellera configuration compacte la donnée d'un triplet $\kappa = (\sigma, o_2, o_3)$ où σ est une permutation applicable à l'ensemble $\mathcal{P}_2$, o_2 est 6-uplet élément de $(\mathcal{O}_2)^6$, et o_3 est 4-uplet élément de $(\mathcal{O}_3)^4$.

Les conventions employées sont les suivantes :

- Les positions des pièces de $\mathcal{P}_2$ sont encodées par une permutation σ représentée par $(\sigma(p_5), \sigma(p_6), \sigma(p_7), \sigma(p_8), \sigma(p_9), \sigma(p_{10}))$ où $\sigma(p_i)$ désigne la pièce occupant la place où se situait p_i initialement.
- L'orientation des pièces de $\mathcal{P}_2$ est donnée dans l'ordre croissant défini par $\prec$.
- L'orientation des pièces de $\mathcal{P}_3$ est donnée dans l'ordre croissant défini par $\prec$.

On notera $\mathcal{K} = \Sigma_{\mathcal{P}_2} \times (\mathcal{O}_2)^6 \times (\mathcal{O}_3)^4$ l'ensemble des configurations compactes.

Question à développer pendant l'oral : Donnez une borne B sur le nombre de configurations compactes.

2.6 Notation d'une configuration compacte

À l'instar des configurations complètes, on introduit une notation abrégée pour les configurations compactes. Lorsque l'on vous demandera la configuration compacte atteinte par le pyraminx vous la donnerez sous la forme abrégée suivante :

$$\left(\underbrace{(5,7,6,9,8,10)}_{\text{Permutation des pièces } p_5 \text{ à } p_{10}} \quad , \quad \underbrace{(0,0,1,0,1,0)}_{\text{Orientations de pièces de } p_5 \text{ à } p_{10}} \quad , \quad \underbrace{(1,2,0,1)}_{\text{Orientations de pièces de } p_{11} \text{ à } p_{14}} \right)$$

Nous donnons ici l'effet de l'application des huits mouvements de l'ensemble $\mathcal{M}_1$ sur la configuration compacte $\kappa_0 = ((5,6,7,8,9,10), (0,0,0,0,0,0), (0,0,0,0))$:

5. Il s'agit de la relation d'ordre lexicographique sur le produit cartésien E^n.

Mouvement	Configuration compacte après application du mouvement
$(\text{base}, n^1, r_{+1})$	$((6,7,5,8,9,10),(0,1,1,0,0,0),(0,0,0,2))$
$(\text{gauche}, n^1, r_{+1})$	$((10,6,7,5,9,8),(0,0,0,1,0,1),(2,0,0,0))$
$(\text{droite}, n^1, r_{+1})$	$((5,6,9,8,10,7),(0,0,1,0,1,0),(0,0,2,0))$
$(\text{arriere}, n^1, r_{+1})$	$((5,8,7,9,6,10),(0,0,0,1,1,0),(0,2,0,0))$
$(\text{base}, n^1, r_{-1})$	$((7,5,6,8,9,10),(1,0,1,0,0,0),(0,0,0,1))$
$(\text{gauche}, n^1, r_{-1})$	$((8,6,7,10,9,5),(1,0,0,1,0,0),(1,0,0,0))$
$(\text{droite}, n^1, r_{-1})$	$((5,6,10,8,7,9),(0,0,0,0,1,1),(0,0,1,0))$
$(\text{arriere}, n^1, r_{-1})$	$((5,9,7,6,8,10),(0,1,0,0,1,0),(0,1,0,0))$

2.7 Générateur pseudo-aléatoire

Considérons $(u_k)_{k\geq 0}$ la suite d'entiers définie par :

$$u_k = \begin{cases} \text{votre } u_0 \quad (\textit{à reporter sur votre fiche réponse}) & \text{si } k = 0 \\ 15091 \times u_{k-1} \mod 64007 & \text{k>0.} \end{cases}$$

Question 1 *Que valent :*
a) u_{20} ***b)*** u_{200} ***c)*** u_{2000}.

2.8 Mélange du pyraminx sur les configurations compactes

On définit l'application *mvt* comme l'unique bijection entre l'intervalle des entiers compris entre 0 et 7 et l'ensemble $\mathcal{M}_1$ vérifiant la propriété :

$$\forall x, y \in [0,7]^2 \quad mvt(x) \prec_{\mathcal{C}} mvt(y) \Leftrightarrow x < y.$$

Soit $\mu_{k\geq 0}$ la suite de mouvements définie par :

$$\mu_k = \begin{cases} mvt(u_0 \mod 8) & k = 0 \\ mvt(u_k \mod 8) \circ \mu_{k-1} & k > 0 \end{cases}$$

Question 2 *Donnez les configurations compactes obtenues après les suites de mouvements suivantes appliquées à la configuration compacte initiale* κ_0 *:*
a) μ_{20} ***b)*** μ_{200} ***c)*** μ_{2000}

2.9 Bijection entre les configurations compactes et les entiers

Nous avons vu à la section 2.4 qu'il est possible d'ordonner totalement les permutations. Il est donc possible de les énumérer dans un ordre déterministe. On peut donc associer à toute permutation son numéro d'ordre : la plus petite a pour numéro 0, la suivante le numéro 1, etc. On souhaite ne pas laisser de trou dans cette énumération.
Soit $E = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ équipé de la relation d'ordre total sur les entiers. Soit $\tau \in \Sigma_E$ la permutation définie par $(\tau(0) = 3, \tau(1) = 7, \tau(2) = 5, \tau(3) = 9, \tau(4) = 6, \tau(5) = 1, \tau(6) = 8, \tau(7) = 2, \tau(8) = 4, \tau(9) = 0)$. Soit τ_k la permutation définie à partir de τ en permutant les éléments en positions $(u_k \mod 10)$ et $(u_{k+1} \mod 10)$. Si les deux positions sont égales alors la permutation est laissée inchangée. Par ailleurs, on prend comme convention que les positions sont indexées de 0 à 9.

Question 3 *Donnez le numéro d'ordre des permutations suivantes :*
a) τ_{20} **b)** τ_{200} **c)** τ_{2000}

Question à développer pendant l'oral : Vous détaillerez l'algorithme que vous avez développé. Vous donnerez sa complexité en fonction du cardinal de l'ensemble sur lequel agit la permutation.

On peut finalement définir une relation d'ordre total sur les configurations compactes en posant :

$$\forall \kappa_1, \kappa_2 \in \mathcal{K}^2 \quad \kappa_1 = (\sigma_1, o_2^1, o_3^1) \prec \kappa_2 = (\sigma_2, o_2^2, o_3^2) \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 \prec \sigma_2 \\ \text{ou } (\sigma_1 = \sigma_2 \text{ et } o_2^1 \prec o_2^2) \\ \text{ou } (\sigma_1 = \sigma_2 \text{ et } o_2^1 = o_2^2 \text{ et } o_3^1 \prec o_3^2) \end{cases}$$

Là encore, on peut donc associer à toute configuration compacte son numéro d'ordre : la plus petite a pour numéro 0, la suivante le numéro 1, etc. On souhaite ne pas laisser de trou dans cette énumération.
Soit σ la permutation de $\Sigma_{\mathcal{P}_2}$ définie par $\sigma = (p_6, p_8, p_5, p_{10}, p_7, p_9)$. Soit σ_k la permutation obtenue à partir de σ par permutation des éléments en positions $(u_k \mod 6)$ et $(u_{k+1} \mod 6)$. Soit κ_k la configuration compacte définie par $\kappa_k = (\sigma_k, (u_k \mod 2, u_{k+1} \mod 2, u_{k+2} \mod 2, u_{k+3} \mod 2, u_{k+4} \mod 2, u_{k+5} \mod 2), (u_{k+6} \mod 3, u_{k+7} \mod 3, u_{k+8} \mod 3, u_{k+9} \mod 3))$.

Question 4 *Donnez le numéro d'ordre des configurations compactes suivantes :*
a) κ_{20} **b)** κ_{200} **c)** κ_{2000}

Inversement il est possible d'associer une configuration compacte à tout entier[6] compris entre 0 et $B-1$.

Question 5 *Donnez les configurations compactes associées aux entiers suivants :*
a) $45 \times u_{20}$ **b)** $45 \times u_{200}$ **c)** $45 \times u_{2000}$

Question à développer pendant l'oral : Vous détaillerez l'algorithme que vous avez développé. Vous donnerez sa complexité en fonction du nombre maximal de configurations compactes.

Note.
La question suivante n'est pas nécessaire pour traiter la suite du sujet.

Question 6 *Donnez les configurations complètes associées aux configurations compactes dont les numéros d'ordre sont les suivants, en prenant comme convention que κ_0 correspond à l'état résolu ϵ_0 du pyraminx :*
a) $45 \times u_{20}$ **b)** $45 \times u_{200}$ **c)** $45 \times u_{2000}$

Question à développer pendant l'oral : Vous détaillerez l'algorithme que vous avez utilisé.

6. B est la borne sur le nombre de configurations compactes que vous avez donné à la question à développer à l'oral de la section 2.5

3 Résolution du pyraminx

Soit $(A_k)_{k\geq 0}$ la suite d'ensembles de configurations compactes définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} A_0 & = & \{\kappa_0\} \\ A_{k>0} & = & \{\kappa \in \mathcal{K} \mid \exists \kappa' \in A_{k-1}, \exists m \in \mathcal{M}_1 \quad \kappa = m(\kappa')\} \end{array}\right.$$

C'est donc pour k fixé l'ensemble des configurations compactes atteignables en k mouvements. Soit $(B_k)_{k\geq 0}$ la suite d'ensembles de configurations compactes définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} B_0 & = & \{\kappa_0\} \\ B_{k>0} & = & \{\kappa \in \mathcal{K} \mid \kappa \in A_k \text{ et } \forall\, k' < k \quad \kappa \notin A_{k'}\} \end{array}\right.$$

Soit C la constante définie par :

$$C = \sum_{k\geq 0} card(B_k)$$

On souhaite déterminer la suite des ensembles $(B_k)_{k\geq 0}$. Pour cela il convient d'explorer l'ensemble des configurations atteignables en un nombre de pas donné.

Indication. Il est nécessaire pour cela de déterminer rapidement si on a déjà rencontré une configuration compacte durant l'exploration. On pourra se servir des fonctions développées aux questions 4 ou 5.

Question à développer pendant l'oral : Vous expliquerez pourquoi tous les ensembles B_k sont vides à partir d'un certain rang. On nommera k_0 le plus grand entier tel que $B_k \neq \emptyset$.

Soit f la fonction de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par :

$$f(x) = card\left(B_{(1+(u_x \mod k_0))}\right)$$

Question 7 *Que valent :*

a) $u_{f(20)}$ **b)** $u_{f(200)}$ **c)** $u_{f(2000)}$

Question à développer pendant l'oral :
- Vous détaillerez l'algorithme que vous avez utilisé pour déterminer la suite d'ensembles $(B_k)_{k\geq 0}$.
- Quelle en est la complexité en temps et en espace mémoire ?
- Donnez la valeur de C. Comparez avec la borne B (que vous avez donnée à la question de la section 2.5). Expliquez la différence.
- Vous donnerez les valeurs de B_k pour toutes les valeurs de k comprises entre 0 et k_0.

On cherche maintenant à déterminer une plus courte suite de mouvements entre la configuration initiale κ_0 et une configuration compacte κ donnée. Comme il peut exister plusieurs plus courts chemins (de même taille donc), on renverra une de ces suites de mouvements possibles. La suite de mouvements sera donnée sous la forme d'une liste d'entiers encodés par la fonction mvt définies à la section 2.8.

Question 8 *Donnez une des plus courtes suites de mouvements entre la configuration initiale κ_0 et les configurations compactes obtenues après application des mouvements suivants sur la configuration initiale κ_0 :*

a) μ_{20} ***b)*** μ_{200} ***c)*** μ_{2000}

Question à développer pendant l'oral : Vous expliquerez le fonctionnement de votre algorithme. Vous en détaillerez la complexité.

Fiche réponse type: Pyraminx

$\widetilde{u_0}$: 17

Question 1

a) 60438

b) 21533

c) 50303

Question 2

a) ((9,6,8,5,10,7),(1,0,1,0,0,0),(2,2,1,0))

b) ((10,6,7,9,8,5),(0,0,0,1,1,0),(1,0,0,2))

c) ((7,6,9,8,5,10),(0,1,0,1,1,1),(0,0,0,2))

Question 3

a) 1355615

b) 1435485

c) 3576045

Question 4

a) 2889174

b) 896528

c) 962741

Question 5

a) ((9,6,10,7,5,8),(1,0,1,0,0,0),(2,0,0,0))

b) ((6,8,10,5,7,9),(1,1,1,0,1,0),(2,1,0,0))

c) ((8,9,5,10,6,7),(1,0,1,0,1,0),(0,1,0,0))

Question 6

a) ((R,J,R,J,R,R,R,B,R),
(V,R,V,V,V,V,B,V,V),
(B,B,B,R,B,B,V,J,B),
(J,V,J,J,J,R,B,J,J))

b) ((R,V,B,J,R,R,R,B,R),
(V,R,V,R,V,V,J,R,V),
(B,B,B,B,B,V,B,J,B),
(J,V,J,J,J,R,V,J,J))

c) ((R,V,B,R,R,R,J,R,R),
(V,J,V,V,V,V,B,R,V),
(B,R,B,R,B,V,J,B,B),
(J,B,J,B,J,J,V,J,J))

Question 7

a) 6475

b) 16984

c) 48549

Question 8

a) 5 ;6 ;4 ;0 ;3 ;6 ;4 ;1 ;

b) 2 ;5 ;1 ;4 ;2 ;1 ;3 ;0 ;

c) 6 ;0 ;3 ;4 ;1 ;7 ;2 ;5 ;1 ;