# Réseaux de Petri

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juillet 2009

**ATTENTION !**

N'oubliez en aucun cas de recopier votre $u_0$
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

**Important.**

Sur votre table est indiqué un numéro $u_0$ qui servira d'entrée à vos programmes. Les réponses attendues sont généralement courtes et doivent être données sur la fiche réponse fournie à la fin du sujet. À la fin du sujet, vous trouverez en fait deux fiches réponses. La première est un exemple des réponses attendues pour un $\widetilde{u_0}$ particulier (précisé sur cette même fiche et que nous notons avec un tilde pour éviter toute confusion!). Cette fiche est destinée à vous aider à vérifier le résultat de vos programmes en les testant avec $\widetilde{u_0}$ au lieu de $u_0$. Vous indiquerez vos réponses (correspondant à votre $u_0$) sur la seconde et vous la remettrez à l'examinateur à la fin de l'épreuve.

En ce qui concerne la partie orale de l'examen, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre $n$, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main ou bien à l'aide de la fiche réponse type fournie en annexe.*** Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.

# 1 Introduction

**Définition 1 (Réseaux de Petri)** *Un réseau de Petri $\mathcal{N}$ est un couple $(P, T)$ tel que $P \cap T = \emptyset$, où :*
- $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ *est un ensemble fini de places.*
- $T = \{t_1, \ldots t_m\}$ *est un ensemble fini de transitions où chaque transition $t_i$ est un couple $(I_i, O_i)$ tel que :*
  - $I_i : P \to \{0, 1\}$ *est une fonction qui associe à chaque place un poids.*
  - $O_i : P \to \{0, 1\}$ *est une fonction qui associe à chaque place un poids.*

On représente généralement un réseau de Petri sous forme graphique comme un graphe biparti[1] dans lequel les nœuds correspondant aux places sont représentés comme des cercles, tandis que les nœuds correspondant aux transitions sont représentés comme des rectangles. Il y a un arc dirigé entre une place $p \in P$ et une transition $t = (I, O) \in T$ si et seulement $I(p) > 0$, et inversement il y a un arc dirigé entre une transition $t = (I, O) \in T$ et une place $p \in P$ si et seulement $O(p) > 0$. Un réseau de Petri avec 4 places et 2 transitions est représenté par la figure 1.

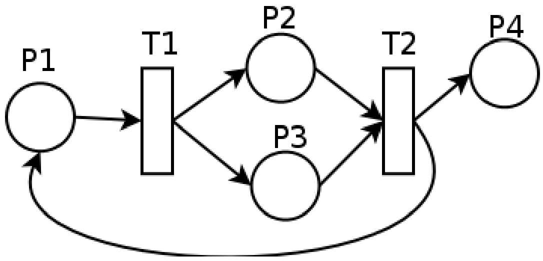


FIG. 1 – Un réseau de Petri avec 4 places et 2 transitions.

**Définition 2 (Marquage)** *Étant donné un réseau de Petri $\mathcal{N} = (P, T)$, un marquage $m$ de $\mathcal{N}$ est une fonction $m : P \to \mathbb{N}$ qui associe à chaque place $p \in P$ du réseau $m(p)$ jetons.*

La convention graphique veut que l'on représente un marquage $m$ en représentant $m(p)$ jetons sous la forme de cercle noirs dans chaque place $p$ du réseau. La figure 2 représente le même réseau de Petri que celui de la figure 1 avec le marquage $m(p_1) = 1$, $m(p_2) = 0$, $m(p_3) = 2$ et $m(p_4) = 1$. Comme dans la suite les places sont canoniquement ordonnées ($p_1 < p_2 < \ldots < p_n$), on peut représenter un marquage $m$ comme un vecteur $\langle m(p_1), \ldots, m(p_n) \rangle$.

**Définition 3 (Réseau de Petri initialisé)** *Un réseau de Petri initialisé est la donnée d'un réseau de Petri $\mathcal{N} = (P, T)$ et d'un marquage initial $m_0$.*

Dans la suite on ne considère que des réseaux de Petri initialisés, par abus de langage on parlera donc de réseaux de Petri que l'on notera indifféremment $(\mathcal{N}, m_0)$ ou $(P, T, m_0)$.

[1]Un graphe est dit biparti, s'il existe une partition de ses nœuds en deux sous-ensembles tels que chaque arête du graphe a une extrémité dans un des sous-ensemble et l'autre dans le second.

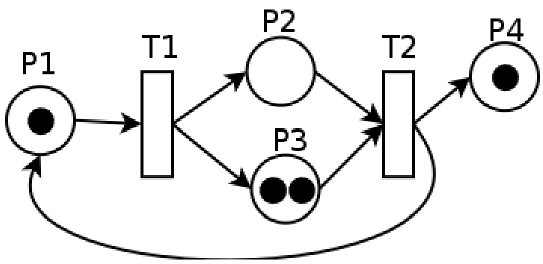


FIG. 2 – Un réseau de Petri initialisé.

**Définition 4 (Transition déclenchable)** *Étant donné un réseau de Petri* $\mathcal{N} = (P, T, m_0)$*, et une transition* $t = (I, O)$*, on dit que* $t$ *est* déclenchable *(à partir du marquage* $m_0$*) si et seulement si :*

$$\forall\, p \in P \quad m_0(p) \geq I(p).$$

*Autrement dit il y a suffisamment de jetons dans chacune des places qui sont reliées à l'entrée de la transition* $t$*.*

Notez que plusieurs transitions peuvent être déclenchables depuis un marquage donné.

**Définition 5 (Déclenchement d'un transition)** *Étant donné un réseau de Petri* $\mathcal{N} = (P, T, m_0)$*, et une transition* $t = (I, O)$ déclenchable*. Dans ce cas et seulement dans ce cas, la transition* $t$ *peut-être* déclenchée*. Cela se traduit par la transformation du marquage* $m_0$ *en un marquage* $m_1$ *qui vérifie* $\forall\, p \in P \quad m_1(p) = m_0(p) - I(p) + O(p)$*. On notera* $m_0 \xrightarrow{t} m_1$*, ou plus simplement* $m_0 \rightarrow m_1$*.*

**Définition 6 (Séquence de transitions)** *On note* $\xrightarrow{*}$ *la clôture réflexive et transitive de la relation* $\rightarrow$*. On a donc* $m \xrightarrow{*} m'$ *si et seulement si* $m = m'$ *ou bien il existe une séquence de marquages* $m_1, \ldots, m_n$ $(n \geq 2)$ *telle que* $m = m_1 \rightarrow m_2 \rightarrow \ldots \rightarrow m_n = m'$*.*

**Définition 7 (Marquage atteignable)** *Étant donné un réseau de Petri* $\mathcal{N} = (P, T, m_0)$*, et un marquage* $m$*. On dit que* $m$ *est* atteignable *(depuis* $m_0$*) si et seulement si* $m_0 \xrightarrow{*} m$*.*

# 2 Génération aléatoire d'instances

On note $M = 64\,007$. Considérons la suite d'entiers $(u_k)$ définie pour $k \geq 0$ par :

$$u_k = \begin{cases} \textit{votre } \mathsf{u}_0 \textit{ (à reporter sur votre fiche)} & \text{si } k = 0 \\ 15\,091 \times u_{k-1} \mod M & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

**Question 1** *Que valent :* ***a)*** $u_{20}$ ***b)*** $u_{200}$ ***c)*** $u_{2000}$.

**Définition 8 (Famille de réseau de Petri pseudo-aléatoire)** *Pour* $(p, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$*,* $k \in \mathbb{N}$ *et* $\mu \in [0, 1]$*, on notera* $N_{p,t,\mu,k}$ *le réseau de Petri défini par :*
– $P = \{1, \ldots, p\}$.
– $T = \{t_1, \ldots, t_t\}$ *où chaque transition* $t_i = (I_i, O_i)$ *est définie de la manière suivante :*

– $\forall j \in P \quad I_i(j) = \begin{cases} 0 \ si \ u_{2p(tk+i-1)+j} < M \times \mu \\ 1 \ sinon. \end{cases}$

– $\forall j \in P \quad O_i(j) = \begin{cases} 0 \ si \ u_{2p(tk+i-1)+p+j} < M \times \mu \\ 1 \ sinon. \end{cases}$

Notez que les réseaux de Petri de la forme $\{N_{p,t,\mu,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ forment une famille de réseaux indexée par $k$ et dont le nombre de places et de transitions est constant. Implémentez une fonction permettant la construction des réseaux de Petri $N_{p,t,\mu,m}$.

**Question 2** *Donnez le nombre d'arcs dirigés[2] que comporte la représentation graphique des réseaux de Petri suivants :*
**a)** $N_{3,3,0.7,0}$ **b)** $N_{10,5,0.9,1}$ **c)** $N_{100,50,0.95,2}$

Soit $\mathbb{M}_j = \langle j, 0, j \ldots, 0, j\rangle$ le marquage à $n$ places obtenu en positionnant alternativement $j \in \mathbb{N}$ jetons dans une place, puis aucun dans la suivante (en commençant par en positionner $j$ dans la première des $n$ places).

**Question 3** *Quelles sont les transitions déclenchables pour les réseaux de Petri et les marquages initiaux associés suivants :*
**a)** $N_{3,3,0.7,0}, \mathbb{M}_1$ **b)** $N_{10,5,0.9,1}, \mathbb{M}_1$ **c)** $N_{100,50,0.95,2}, \mathbb{M}_1$

**Question 4** *Quels sont les marquages atteints en une étape en déclenchant la plus petite transition possible[3] pour les réseaux de Petri et les marquages initiaux associés suivants :*
**a)** $N_{3,3,0.7,0}, \mathbb{M}_1$ **b)** $N_{5,5,0.9,0}, \mathbb{M}_1$ **c)** $N_{10,7,0.95,0}, \mathbb{M}_1$

**Question 5** *Dans chacun des réseaux de Petri initialisés (avec le marquage indiqué) suivants, indiquez le marquage obtenu après avoir déclenché trente transitions. Pour des raisons de reproductibilité de l'épreuve, on choisira là encore à chaque étape la plus petite transition déclenchable disponible.*
**a)** $N_{3,3,0.7,0}, \mathbb{M}_5$ **b)** $N_{5,5,0.9,0}, \mathbb{M}_5$ **c)** $N_{10,7,0.95,0}, \mathbb{M}_5$

**Question 6** *Dans les mêmes conditions que la question précédente, comptez le nombre de fois que le marquage initial a été obtenu lors de la simulation du fonctionnement du réseau. L'état initial du réseau ne sera pas pris en compte dans le résultat attendu.*
**a)** $N_{3,3,0.7,0}, \mathbb{M}_5$ **b)** $N_{5,5,0.9,0}, \mathbb{M}_5$ **c)** $N_{10,7,0.95,0}, \mathbb{M}_5$

# 3 Graphe des marquages

**Définition 9 (Graphe des marquages)** *Étant donné un réseau de Petri $\mathcal{N} = (P, T, m_0)$, on définit $G_m(\mathcal{N}) = (V, E)$ le graphe dont l'ensemble des sommets $V$ est défini par $V = \left\{m \mid m_0 \xrightarrow{*} m\right\}$ et l'ensemble des arêtes $E$ est défini par $E = \{(m, m') \mid m \to m'\}$. $G_m(\mathcal{N})$ est appelé le graphe des marquages, il constitue l'espace d'états de $\mathcal{N}$.*

[2] Le réseau de Petri de la figure 1 comporte sept arcs dirigés.
[3] Au sens de l'ordre strict $t_1 < \ldots < t_n$

**Question à développer pendant l'oral :** Donnez un exemple simple de réseau de Petri (avec son marquage initial) pour lequel le graphe d'états comporte $n$ états, et un exemple simple pour lequel il est infini.

On souhaite développer un algorithme qui sur l'entrée d'un réseau de Petri $(\mathcal{N}, m_0)$ (avec un marquage initial) permette de construire le graphe des marquages $G_m(\mathcal{N}) = (V, E)$. On va pour cela procéder en deux étapes. Commencez par développer un algorithme qui construit la liste des états atteignables depuis le marquage initial $m_0$. Comme cette liste peut être potentiellement infinie, cet algorithme prendra en entrée une borne ($|V|_{max}$), et il s'arrêtera lorsque :

- il aura inséré exactement $|V|_{max}$ dans la liste des sommets ;
- ou lorsqu'il aura parcouru et inséré dans la liste des sommets, l'ensemble des sommets de $V$ et que $|V| < |V|_{max}$.

Cet algorithme construit donc l'ensemble $V$ (ou un sous-ensemble) des sommets du graphe des marquages. Notez que vous devrez bien entendu détecter les sommets déjà insérés afin de ne pas les insérer plusieurs fois.

**Question à développer pendant l'oral :** Quelle est la complexité de votre algorithme ? Voyez-vous une amélioration possible ?

Soit $\mathbb{U}_j = \langle j, j \ldots, j \rangle$ le marquage à $n$ places obtenu en positionnant exactement $j \in \mathbb{N}$ jetons dans chacune des places.

**Question 7** *Pour chacun des réseaux de Petri suivants déterminer le nombre de sommets du graphe des marquages, obtenu par votre algorithme (on utilisera la borne $|V|_{max} = 3000$) ?*

***a)*** $N_{3,3,0.7,0}, \mathbb{U}_{15}$ ***b)*** $N_{3,3,0.7,1}, \mathbb{U}_{15}$ ***c)*** $N_{3,3,0.7,2}, \mathbb{U}_{15}$

Soit $A_{p,t,\mu,m_0}$ la famille de réseaux de Petri avec marquage initial égal à $m_0$ ainsi définie :

$$A_{p,t,\mu,m_0} = \{(N_{p,t,\mu,k}, m_0) \,|\, 0 \leq k < 50\}$$

On notera $B_{p,t,\mu,m_0,m_{max}}$ la sous-famille de $A_{p,t,\mu,m_0}$ ainsi définie :

$$B_{p,t,\mu,m_0,|V|_{max}} = \{\mathcal{N} \in A_{p,t,\mu,m_0} \,|\quad G_m(\mathcal{N}) = (V, E) \text{ et } |V| \leq |V|_{max}\}$$

Autrement dit, on filtre $A_{p,t,\mu,m_0}$ par le critère suivant : le graphe des marquages d'un élément de $B_{p,t,\mu,m_0,|V|_{max}}$ est fini et contient au plus $|V|_{max}$ nœuds.

**Question 8** *Déterminer le cardinal de chacune des familles de réseaux de Petri suivantes ?*

***a)*** $B_{3,3,0.7,\mathbb{U}_5,3000}$ ***b)*** $B_{3,3,0.8,\mathbb{U}_5,3000}$ ***c)*** $B_{3,3,0.9,\mathbb{U}_5,3000}$

Dans le cas où le graphe est fini et que son nombre de sommets est plus petit qu'une borne fixée (c'est le cas des réseaux de Petri de la famille $B_{p,t,\mu,m_0,m|V|_{max}}$), on est capable de déterminer l'ensemble des sommets du graphe des marquages. Afin de construire le graphe des marquages, il ne reste donc plus qu'à construire l'ensemble des arêtes reliant ces nœuds. Proposez un algorithme qui sur l'entrée d'un réseau de Petri $\mathcal{N}$ et de l'ensemble $E$ des nœuds de son graphe des marquages $G_m(\mathcal{N})$, produise le graphe $G_m(\mathcal{N})$.

**Question 9** *Pour chacune des famille de réseaux de Petri suivants déterminer le nombre moyen d'arcs des graphes des marquages la composant ?*
**a)** $B_{3,3,0.7,\mathbb{U}_5,3000}$ **b)** $B_{3,3,0.8,\mathbb{U}_5,3000}$ **c)** $B_{3,3,0.9,\mathbb{U}_5,3000}$

**Question à développer pendant l'oral :** Quelle est la complexité de votre algorithme ?

**Question à développer pendant l'oral :** Dans un but de simplicité, nous avons procédé à la construction du graphe en deux étapes. Voyez-vous un moyen de procéder permettant d'éviter cette décomposition ?

# 4 Détection des blocages

**Définition 10 (Blocage)** *Étant donné un réseau de Petri $\mathcal{N} = (P, T, m_0)$, on dit que qu'un marquage $m$ atteignable depuis $m_0$ constitue un blocage lorsqu'il n'y a aucune transition déclenchable depuis $m$.*

Vous élaborerez un algorithme qui sur l'entrée d'un graphe de marquage détermine si un tel blocage existe.

**Question à développer pendant l'oral :** Quel est la complexité de votre algorithme ?

On notera $C_{p,t,\mu,m_0,|V|_{max}}$ la sous-famille de $B_{p,t,\mu,m_0,V_{max}}$ ainsi définie :

$$C_{p,t,\mu,m_0,|V|_{max}} = \left\{\mathcal{N} \in B_{p,t,\mu,m_0,|V|_{max}} \mid \quad G_m(\mathcal{N}) \text{ possède un blocage.}\right\}$$

**Question 10** *Déterminer le cardinal de chacune des familles de réseaux de Petri suivantes ?*
**a)** $C_{3,3,0.7,\mathbb{U}_5,3000}$ **b)** $C_{3,3,0.8,\mathbb{U}_5,3000}$ **c)** $C_{3,3,0.9,\mathbb{U}_5,3000}$

Vous concevrez un algorithme qui détermine lorsqu'un tel blocage existe, la plus petite séquence (au sens de la longueur) de transitions permettant d'aboutir à un blocage depuis le marquage initial.

**Question à développer pendant l'oral :** Quelle est la complexité de votre algorithme ?

**Question 11** *Pour chacune des familles de réseaux de Petri suivantes déterminer la longueur moyenne des plus petits chemins permettant d'aboutir à un blocage.*
**a)** $C_{3,3,0.7,\mathbb{U}_5,3000}$ **b)** $C_{3,3,0.8,\mathbb{U}_5,3000}$ **c)** $C_{3,3,0.9,\mathbb{U}_5,3000}$

# 5 Diamètre des graphes de marquage

Dans cette section on va considérer une version non dirigée du graphe des marquages. Étant donné un réseau de Petri avec marquage initial $(\mathcal{N}, m_0)$ et son graphe des marquages $G_m(\mathcal{N})$, on notera $G^*_m(\mathcal{N})$ la version non orientée du graphe. Plus précisément si on note $G_m(\mathcal{N}) = (V, E)$, alors $G^*_m(\mathcal{N}) = (V^*, E^*)$ est le graphe dont l'ensemble des

sommets $V^* = V$ est le même que celui de $G_m(\mathcal{N})$ et l'ensemble des arêtes $E^*$ est défini de la manière suivante : $\{(m_1, m_2) \mid (m_1, m_2) \in E \text{ ou } (m_2, m_1) \in E\}$.
Par ailleurs, on définit la distance entre deux sommets d'un graphe comme le nombre minimum d'arêtes consécutives qu'il faut traverser pour joindre les deux sommets. Nous nous intéresserons également au sommet le plus éloigné d'un sommet s que nous noterons f(s), et d(s) la distance entre s et f(s).

**Définition 11 (Diamètre)** *Nous définissons le diamètre du graphe comme étant le maximum de d(s) sur tous les sommets du graphe.*

**Question 12** *Pour chacune des familles de réseau de Petri suivantes, pour son graphe comportant le plus de nœuds (et en cas d'égalité, celui correspondant à l'indice $k$ le plus élevé dans la famille), calculer le diamètre de sa version non orientée.*
***a)*** $C_{3,3,0.7,\mathbb{U}_5,3000}$ ***b)*** $C_{3,3,0.8,\mathbb{U}_5,3000}$ ***c)*** $C_{3,3,0.9,\mathbb{U}_5,3000}$

**Question à développer pendant l'oral :** Vous exposerez votre algorithme ainsi que sa complexité.

◊
◊ ◊
◊