Surface aléatoire

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juin/juillet 2007

ATTENTION !

N'oubliez en aucun cas de recopier votre u_0
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

Important.
Lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main***.

Nous étudions dans cette épreuve une surface représentée par un tableau à deux dimensions d'entiers. Cette surface est définie de façon pseudo-aléatoire, de façon telle que la variation de hauteur entre deux points voisins reste modérée.

1 Préliminaire

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie de la façon suivante :
- u_0 est donné sur votre table *(à reporter sur votre fiche)*.
- $u_{n+1} = (1 + 16423 \times u_n)$ modulo 62951.

Question 1 *Quelle est la valeur de* **a)** u_5, **b)** u_{1000}, **c)** u_{40000} ?

On pose ensuite $v_n = (u_n \text{ modulo } 31) - 15$.

Question 2 *Quelle est la valeur maximale de* $|\sum_{k=0}^{n} v_k|$ *pour* **a)** $n \leq 5$, **b)** $n \leq 1000$, **c)** $n \leq 40000$?

2 Définitions et notations

Dans la suite de l'énoncé, les définitions et notations seront utilisées :
- n étant un entier fixé, on définit $\mathbb{N}_n = \{0, \ldots, n-1\}$ et $C_n = \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$;
- deux éléments (x, y) et (x', y') de C_n sont dit <u>adjacents</u> si $|x - x'| + |y - y'| = 1$; plus généralement, la <u>distance</u> entre (x, y) et (x', y') sera définie comme $D_{(x,y),(x',y')} = |x - x'| + |y - y'|$;
- si x est une réel, $[x]$ désigne l'entier le plus proche de x (l'arrondi se fait par défaut si la partie fractionnaire x est strictement inférieur à 0,5, et par excès sinon) ;
- si E est un ensemble, $|E|$ désigne le cardinal de E.

3 Fonction

On définit une fonction h de C_n dans $\mathbb{Z}$ à partir de la suite v par les relations suivantes :
- $h(0, 0) = 1000$.
- pour $1 \leq i \leq n - 1$,

$$\begin{aligned} h(i,1) &= h(i-1,1) + v_{i^2} \\ h(1,i) &= h(1,i-1) + v_{i^2+1} \end{aligned}$$

- pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq i$,

$$h(i,j) = \left[\frac{4.(h(i-1,j) + h(i,j-1)) - 3.h(i-1,j-1)}{5}\right] + v_{i^2+2j}$$

et, si $j \neq i$,

$$h(j,i) = \left[\frac{4(h(j-1,i) + h(j,i-1)) - 3h(j-1,i-1)}{5}\right] + v_{i^2+2j+1}$$

On remarquera que, dès lors que i et j sont inférieurs à n, $h(i,j)$ est indépendant de n.

Question 3 *Avec $n = 200$, donnez les valeurs de :* ***a)*** $h(2,1)$, ***b)*** $h(19,13)$, ***c)*** $h(199,199)$ *? Quelle est l'amplitude (la différence entre le maximum et le minimum) de h sur C_n pour* ***d)*** $n = 5$ *;* ***e)*** $n = 50$ *;* ***f)*** $n = 200$ *? Quel est l'écart maximum de h entre deux points adjacents de C_n pour* ***g)*** $n = 5$ *;* ***h)*** $n = 50$ *;* ***i)*** $n = 200$ *?*

4 Éclairage

On suppose notre surface éclairée par un source à l'infini émettant des rayons lumineux parallèles. Par définition, un point (i,j) sera éclairé si :

$$\forall 0 \leq k < \min\{i,j\}, h(i,j) > h(i-k, j-k) - 3k.$$

Question 4 *Donner le nombre de points de C_n éclairés pour* ***a)*** $n = 5$ *;* ***b)*** $n = 50$ *;* ***c)*** $n = 200$.

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé ainsi que sa complexité.*

5 Chemins

On définit un chemin dans C_n de longueur l comme une fonction c de $\{1, \ldots, l\}$ dans C_n telle que pour tout i dans $\{1, \ldots, l-1\}$, $c(i)$ et $c(i+1)$ sont adjacents. L'origine du chemin est $c(1)$, sa destination $c(l)$.
Dans ce qui suit, si c est un chemin dans C_n, x^c et y^c désignent les deux composantes de c.
Pour assurer l'unicité des réponses dans les questions à venir, on utilise un ordre (lexicographique) $\preceq$ sur les chemins : $c \preceq c'$ si le plus petit indice i_0 tel que $c(i_0) \neq c'(i_0)$ vérifie soit $x^c(i_0) < x^{c'}(i_0)$, soit $x^c(i_0) = y^{c'}(i_0)$ et $y^c(i_0) < y^{c'}(i_0)$.
Nous considérons l'ensemble P_n des chemins allant de $(0,0)$ à $(n-1, n-1)$, de sorte que pour tout i, $x^c(i+1) - x^c(i) = 1$ ou $y^c(i+1) - y^c(i) = 1$. Ainsi les chemins de P_n sont tous de longueurs $2n-1$.
Pour chaque chemin c de longueur, on définit une fonction de coût f :

$$f(c) \quad = \quad \sum_{i=2}^{l} |h(c(i)) - h(c(i-1))|$$

Notre but est d'abord de construire un chemin de P_n ayant le plus grand coût possible, en partant de $(0,0)$, en supposant connue les valeurs de h uniquement de façon locale. Ainsi, k étant un entier strictement positif fixé, on suppose qu'à partir d'un point (x,y), on ne peut accéder aux valeurs de h que pour les points (x', y') situés à une distance inférieure ou égale à k de (x,y). On choisit alors le point adjacent de (x,y) commençant un chemin de longueur k de coût maximal pouvant s'intégrer dans un chemin de P_n.
Lorsqu'il y a plusieurs possibilités équivalentes, on privilégiera le chemin maximal selon l'ordre $\preceq$.

Question 5 *Donner, pour les valeurs de n, k suivantes, le coût du chemin total construit* ***a)*** $n = 5$ *et* $k = 2$ *;* ***b)*** $n = 50$ *et* $k = 5$ *;* ***c)*** $n = 200$ *et* $k = 50$.

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé ainsi que sa complexité.*

On cherche à présent un chemin de coût minimal allant de $(0, 0)$ à $(n - 1, n - 1)$, sans la contrainte que ce chemin doit appartenir à P_n (ainsi sa longueur est quelconque). La méthode « classique » pour construire un tel chemin est de calculer pour chaque point le coût du chemin de coût minimal y arrivant. Pour cela, on maintient deux ensembles de sommets E et F, et un majorant $m(x, y)$ du coût du chemin minimal permettant d'aller de $(0, 0)$ à (x, y).

- Initialement F est l'ensemble des points, et E est vide. On sait d'autre part qu'un chemin de coût 0 permet d'aller de $(0, 0)$ à $(0, 0)$.
- A chaque étape, on choisit le point (x, y) de F ayant le plus petit $m(x, y)$, on retire ce point de F et on l'ajoute dans E. De plus, on mets à jour les valeurs de $m(x', y')$ pour les points (x', y') dans F adjacents à (x, y), en prenant en compte les chemins passant par (x, y).
- Notre algorithme s'arrête lorsque $(n - 1, n - 1)$ n'est plus dans F.

Ainsi, à tout instant, $m(x, y)$ représente le coût du chemin de coût minimal (lorsqu'il existe) de $(0, 0)$ à (x, y), passant uniquement par des points de E (sauf pour sa destination).
Pour améliorer l'algorithme, on peut prendre en compte le fait que le coût pour passer d'un point à un point adjacent ne prend qu'un nombre limité de valeurs, ce qui limite le nombre de valeurs possibles à un instant donné pour $m(x, y)$ avec (x, y) dans F.

Question 6 *Donner le coût du chemin de coût minimal d'origine* $(0, 0)$ *et de destination* $(n - 1, n - 1)$ *pour* ***a)*** $n = 5$, ***b)*** $n = 50$ *et* ***c)*** $n = 200$.

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé ainsi que sa complexité.*

6 Minima

Un couple (i, j) avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ est un minimum local pour h si $h(i, j)$ est inférieur ou égal à tous les $h(i', j')$ tels que (i', j') soient adjacents à (i, j). On note M l'ensemble de ces minima.
On considère les chemins « descendant » (c'est-à-dire tels que $h \circ c$ est décroissante au sens large) dont la destination est un minimum local. On note $D_{(i,j)}$ l'ensemble de ces chemins d'origine (i, j), et $M_{(i,j)}$ l'ensemble des destinations des chemins dans $D_{(i,j)}$.

Question 7 *Combien vaut* $\max_{(i,j) \in \mathcal{C}_n} |M_{(i,j)}|$*, c'est-à-dire le nombre maximum de minima accessibles depuis par un chemin descendant depuis un point donné, pour* ***a)*** $n = 5$, ***b)*** $n = 50$, *et* ***c)*** $n = 200$ *? Combien de points P permettent d'atteindre un tel nombre de minima pour* ***d)*** $n = 5$, ***e)*** $n = 50$, *et* ***f)*** $n = 200$ *?*

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé ainsi que sa complexité.*

On définit à présent une structure de graphe non orienté pondéré sur M : deux éléments distincts (x, y) et (x', y') de M sont reliés par une arête de poids a si :

– il existe un chemin c d'origine (x, y), de destination (x', y'), croissant jusqu'à un certain indice i_c puis décroissant au-delà ;
– a est le minimum des $h(c(i_c))$, où c est l'ensemble des chemins vérifiant les propriétés ci-dessus.

Ainsi, une arête de poids a lie deux minima « voisins » par un col de hauteur a. On note A l'ensembles des arêtes du graphe, la $w : A \to \mathbb{Z}$ la fonction de pondération. Aucune arête ne relie un sommet à lui-même.

Question 8 *Quel est le cardinal de A pour* **a)** $n = 5$ *?* **b)** $n = 50$ *?* **c)** $n = 200$ *?*

Etant donné un entier k strictement positif, on considère $\mathcal{Z}_k$ l'ensemble des sous-ensembles Z non vide de M vérifiant la propriété suivante : il existe $(x, y) \in Z$ vérifiant $h(x, y) = \min h(Z)$, et Z est l'ensemble des éléments de M accessibles depuis (x, y) par un chemin c tel que le maximum de $h \circ c$ est inférieur ou égal à $h(x, y) + k$. Noter que $\mathcal{Z}_k$ est toujours non vide.

Question 9 *Avec $k = 30$, quel est le cardinal de $\mathcal{Z}_k$ pour* **a)** $n = 5$, **b)** $n = 50$ *et* **c)** $n = 200$ *?*

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé ainsi que sa complexité.*

Question 10 *Quelle est la plus petite valeur de k tel que $\mathcal{Z}_k$ est un singleton pour* **a)** $n = 5$, **b)** $n = 50$ *et* **c)** $n = 200$ *?*

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé ainsi que sa complexité.*

◇

◇ ◇

◇