Dératisation à Manhattan

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juin/juillet 2007

ATTENTION !

N'oubliez en aucun cas de recopier votre u_0
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

Important.
Lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main***. Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.

1 Introduction

Baaaam ! Encore une explosion de gaz dans les sous-sols de Manhattan. En effet, ces dernières années, d'impressionnantes colonies de rats ont élu domicile dans les égouts et le service de dératisation fait son possible pour éliminer ce fléau.
Comme vous le savez, Manhattan est organisé de façon très régulière avec des rues et des avenues formant une grille rectangulaire. Les égouts suivent le même arrangement et les rats établissent toujours leurs colonies au niveau des intersections de rues. La seule méthode efficace pour s'en débarrasser semble être l'utilisation de bombes de gaz semblables à celle qui vient d'exploser. Cependant, ce gaz n'est pas nocif que pour les rats et il convient d'évacuer les immeubles dans la zone d'action de la bombe avant son explosion. Le placement de ces bombes doit donc être choisi avec précaution. Une des spécificités de ces bombes est que lors de leur explosion, le gaz se diffuse de façon rectangulaire le long des égouts. La Figure 1 représente la zone couverte par l'explosion d'une bombe de rayon 1.

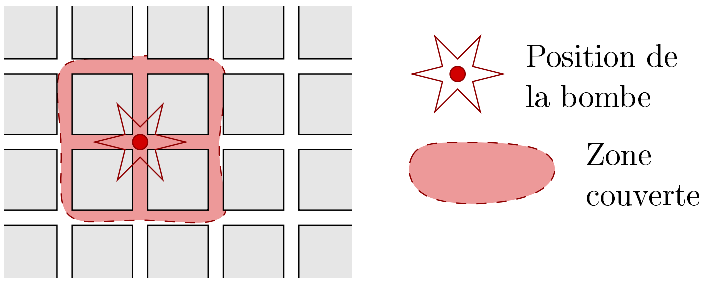

FIG. 1 – Zone couverte par l'explosion d'une bombe de rayon 1.

Notre objectif est de réfléchir à la conception d'algorithmes permettant soit de supprimer le plus grand nombre de rats à l'aide d'un ensemble de bombes donné, soit de trouver le plus petit nombre de bombes (de même rayon) nécessaires à l'extinction de toutes les colonies.
L'efficacité des programmes que vous concevrez sera prise en compte. Il vous sera demandé de donner une réponse pour chacune des situations, que vous ne pourrez calculer dans le temps imparti qu'à la condition que vous ayez programmé des algorithmes efficaces. Il est à noter que moins d'une minute de calcul est nécessaire pour chacune des questions de ce sujet.

2 Génération aléatoire de colonies

La situation de la ville de Manhattan peut être modélisée par les données suivantes :
- n le nombre de colonies,
- m le nombre de bombes,
- la liste de n triplets (x_i, y_i, t_i) avec $1 \leqslant i \leqslant n$ où (x_i, y_i) représente la coordonnée de la $i^{\text{ème}}$ colonie et t_i la taille de cette colonie,
- le rayon d des m bombes.

Chacune des valeurs précédentes est à valeur dans $\mathbb{N}^*$.

L'objectif est de placer les m bombes dans le plan afin de supprimer le plus grand nombre de rats possible. Un placement P des bombes est représenté par $(X_1, Y_1), \ldots, (X_m, Y_m)$. Une colonie est couverte par le placement P s'il existe une bombe j à distance (pour la norme infinie) inférieure à d. Autrement dit, la colonie i est couverte par le placement P si et seulement s'il existe une bombe j telle que $\max(|x_i - X_j|, |y_i - Y_j|) \leqslant d$.
Le poids d'un placement est la somme des t_i des colonies couvertes (attention, une colonie couverte par plusieurs bombes ne compte qu'une seule fois dans le poids d'un placement) et c'est donc ce que l'on va chercher à maximiser par la suite.
Considérons la suite d'entiers (u_k) définie pour $k \geqslant 0$ par :

$$u_k = \begin{cases} \textit{votre } \mathtt{u_0} \textit{ (à reporter sur votre fiche)} & \text{si } k = 0 \\ 15\,091 \times u_{k-1} \mod 64\,007 & \text{si } k \geqslant 1 \end{cases}$$

Attention : On choisira u_0 strictement positif et inférieur ou égal à $64\,006$.

Question 1 *Que valent :* ***a)*** u_{10} ***b)*** u_{100} ***c)*** u_{1000}.

Définition 1 *On note $C(n, m, d)$ l'instance comportant m bombes de rayon d et n colonies telles que la colonie i (pour $0 \leqslant i < n$) est située en $(x_i, y_i) = ((u_{3i} \mod 10000) + 1, (u_{3i+1} \mod 10000) + 1)$ et est de taille $t_i = (u_{3i+2} \mod 40) + 1$.*
S'il existe $i < j$ tel que $(x_i, y_i) = (x_j, y_j)$ on fusionnera la colonie j avec la colonie i en ajoutant t_j à t_i et on supprimera la colonie j de la liste. Il y aura alors strictement moins de n colonies.

Question 2 *Donner la taille de la colonie ayant la plus petite coordonnée selon x (et en cas d'ex-aequo celle ayant la plus petite coordonnée selon y).*
a) $C(10, 2, 500)$ ***b)*** $C(50, 10, 500)$ ***c)*** $C(1000, 20, 500)$

3 Le cas mono-dimensionnel

Dans cette partie, on s'intéresse au cas mono-dimensionnel, c'est-à-dire au cas où on considère que $y_i = 1$ pour tout $0 \leqslant i < n$. On ne considèrera que des placements $[x - d, x + d]$ dits "canoniques", c'est-à-dire tels que $x - d$ coïncide avec une colonie et x est le plus petit possible.

Question 3 *Écrire une fonction retournant le placement optimal d'une bombe et indiquer le nombre de rats tués pour chacune des configurations suivantes :*
a) $C(10, 2, 500)$ ***b)*** $C(50, 10, 500)$ ***c)*** $C(1000, 20, 500)$

Question 4 *Écrire une fonction retournant le placement optimal de deux bombes et indiquer le nombre de rats tués pour chacune des configurations suivantes :*
a) $C(10, 2, 500)$ ***b)*** $C(50, 10, 500)$ ***c)*** $C(1000, 20, 500)$

Question 5 *Écrire une fonction calculant le nombre minimal de bombes pour éradiquer toutes les colonies et indiquer ce nombre pour chacune des configurations suivantes :*
a) $C(10, 2, 500)$ ***b)*** $C(50, 10, 500)$ ***c)*** $C(1000, 20, 500)$

On peut remarquer un certain nombre de choses. D'une part le nombre de positions canoniques pour une bombe donnée est borné par n. D'autre part, le placement optimal de m bombes peut s'obtenir en posant une bombe à un endroit donné et en utilisant le placement optimal de $m-1$ bombes pour les colonies non couvertes et situées à droite de la première bombe. Si on note $A[s,k]$ le nombre optimal de rats tués en plaçant k bombes à droite de la s-ième colonie, on peut donc écrire une relation de récurrence sur A et le stockage de A ne nécessite qu'un espace mémoire raisonnable.

Question 6 *En déduire un algorithme retournant un placement optimal de m bombes et indiquer le nombre de rats tués pour chacune des configurations suivantes :*
a) $C(10,2,500)$ ***b)*** $C(50,10,500)$ ***c)*** $C(1000,20,500)$

4 Le cas bi-dimensionnel

On s'intéresse dans cette partie au cas général où les deux coordonnées sont considérées. On peut alors faire le constat suivant :
- comme l'illustre la Figure 2, on peut se restreindre aux positions de bombes telles que le bord supérieur et le bord gauche de la zone de couverture sont tous deux en contact avec une colonie (pas nécessairement la même).

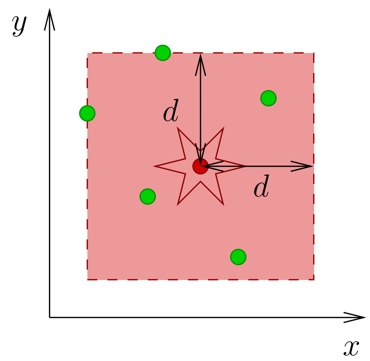

FIG. 2 – Positionnement canonique d'une bombe : le bord supérieur et le bord gauche de la zone de couverture sont tous deux en contact avec une colonie.

Le nombre de positionnement est donc toujours polynomial mais bien plus gros que précédemment. On propose de regarder l'algorithme glouton consistant à placer successivement les bombes à l'endroit permettant d'éliminer le plus grand nombre de rats possible.
On propose donc l'utilisation de la structure suivante pour essayer de réduire au mieux la complexité. On note $R=\{1,\dots,n\}$ l'ensemble des colonies B l'ensemble de positionnements canoniques de bombes possibles. On dira que $r\in R$ et $b\in B$ sont reliés si le positionnement b couvre la colonie r. On note E l'ensemble de ces relations. Pour mettre en oeuvre efficacement l'algorithme glouton on aura besoin de savoir rapidement le nombre de rats tués par une bombe donnée. On aura également besoin de pouvoir mettre à jour rapidement R, B et E lorsque l'on pose une bombe donnée.

Question 7 *Écrire une fonction construisant la structure en question et indiquer $|B|$, le nombre de positions possibles pour les configurations suivantes :*

a) $C(10, 2, 500)$ **b)** $C(50, 10, 500)$ **c)** $C(1000, 20, 500)$

Question 8 *Écrire une fonction retournant le placement optimal d'une bombe et indiquer le nombre de rats tués pour chacune des configurations suivantes :*
a) $C(10, 2, 500)$ **b)** $C(50, 10, 500)$ **c)** $C(1000, 20, 500)$

Question 9 *Écrire une fonction mettant la structure à jour lorsque l'on pose une bombe à un endroit donné et écrire l'algorithme glouton plaçant m bombes. Indiquer le nombre de rats tués pour chacune des configurations suivantes :*
a) $C(10, 2, 500)$ **b)** $C(50, 10, 500)$ **c)** $C(1000, 20, 500)$

Question 10 *Écrire une fonction calculant gloutonnement le nombre de bombes pour éradiquer toutes les colonies et indiquer ce nombre pour chacune des configurations suivantes :*
a) $C(10, 2, 500)$ **b)** $C(50, 10, 500)$ **c)** $C(1000, 20, 500)$

Suite aux temps de calcul prohibitifs et aux résultats décevants de cet algorithme, on propose une autre approche. L'idée consiste à découper l'espace en bandes horizontales de largeur $2d$ et à utiliser les solutions pour le cas mono-dimensionnel. Attention, pour créer ces bandes horizontales, on prendra bien soin d'utiliser le même type de techniques que dans le cas mono-dimensionnel et de toujours traiter les coordonnées par ordre croissant.

Question 11 *Pour couvrir toutes les colonies, on propose d'appliquer la solution optimale mono-dimensionnelle dans chaque bande. Indiquer le nombre de bombes nécessaires à l'aide de cette méthode pour chacune des configurations suivantes :*
a) $C(10, 2, 500)$ **b)** $C(50, 10, 500)$ **c)** $C(1000, 20, 500)$

Question 12 *On propose un autre algorithme pour placer m bombes. Comme précédemment, on coupe en bandes horizontales de largeur $2d$, puis on sélectionne la bande où il est le plus intéressant de placer une bombe. On met à jour et on recommence. Indiquer le nombre de rats tués à l'aide de cette méthode pour chacune des configurations suivantes :*
a) $C(10, 2, 500)$ **b)** $C(50, 10, 500)$ **c)** $C(1000, 20, 500)$

$\diamondsuit$
$\diamondsuit \quad \diamondsuit$
$\diamondsuit$