La Guerre des Étoiles

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juin/juillet 2007

ATTENTION !

N'oubliez en aucun cas de recopier votre u_0
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

Important.
Lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main***. Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.

1 Introduction

Il y a bien longtemps dans une galaxie lointaine, très lointaine, les humains des forces de l'alliance ont développé une technologie leur permettant d'emporter une victoire définitive contre les races extra-terrestres. Cette nouvelle technologie leur a permis de produire d'énormes vaisseaux de combat connus sous le nom de "Dents de Sabre" et de puissance équivalente aux redoutables bases de défense alien : les bases "Mammouths". À cette époque, les forces de l'alliance contrôlaient un certain nombre de planètes alors que d'autres étaient sous le contrôle des aliens. À l'aide des "Dents de Sabre", les humains ont fini par emporter la victoire contre les aliens, à l'issue de ce qui fut la première guerre interplanétaire de l'histoire. Notre objectif est d'effectuer quelques simulations afin de vérifier certaines hypothèses historiques.

La production de chaque vaisseau nécessite une certaine quantité de temps constante au cours du temps et propre à chaque planète. Le taux de production de la planète i est noté ϱ_i (en nombre de vaisseaux par année) et chaque planète dispose initialement d'un certain nombre n_i de vaisseaux. Chaque planète commence à produire des vaisseaux dès le début de la simulation. Ainsi, au temps t, la planète i dispose de $n_i + \varrho_i.t$ vaisseaux. La défense des planètes alien est assurées par les puissantes bases Mammouths. De même, chaque planète alien j dispose initialement d'un certain nombre n_j de bases et en produit ϱ_j par an.

Lors d'un affrontement entre les vaisseaux de l'alliance et les bases alien, l'armée en supériorité numérique emporte le combat. En cas de victoire de l'alliance, cette dernière prend le contrôle de la planète. En cas d'égalité des forces en présences, c'est l'alliance qui emporte la victoire.

Bol, le général en chef de l'alliance avait décidé de la stratégie suivante : pour chaque planète alien j, il choisit une planète de l'alliance i qui produira des vaisseaux jusqu'à la date t_i et qui seront tous envoyés vers la planète j. Une planète alien ne peut donc être envahie que par au plus une planète de l'alliance et aucune planète de l'alliance n'envoie ses vaisseaux vers deux planètes alien différentes. Enfin, Bol avait également décidé que pour profiter de l'effet de surprise tous les vaisseaux des forces de l'alliance partiraient à la même date.

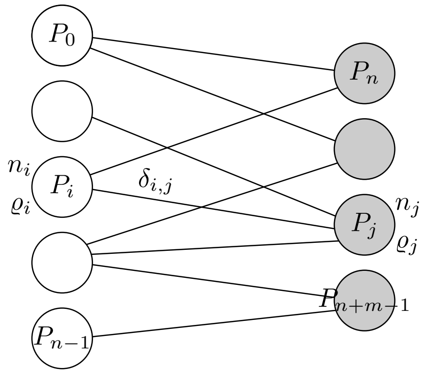
Une des difficulté tient au fait qu'il faut un temps $\delta_{i,j}$ (parfois infini en raison de l'inexistence de voie inter-galactique) pour se rendre de la planète i à la planète j. Et pendant ce temps, les planètes alien continuent de produire leurs bases de défense.

Notre objectif est d'aider le général Bol à trouver un plan de bataille permettant de prendre le contrôle de chaque planète alien en le moins de temps possible.

L'efficacité des programmes que vous concevrez sera prise en compte. Vous devrez donc concevoir des structures de données adaptées à vos algorithmes. En particulier accéder rapidement à la liste des planètes voisines à une planète donnée sera important. Il vous sera demandé de donner une réponse pour chacune des situations, que vous ne pourrez calculer dans le temps imparti qu'à la condition que vous ayez programmé des algorithmes efficaces. Il est à noter que tout programme mettant en œuvre les algorithmes et les structures de données préconisés par la suite, auront des temps d'exécutions inférieurs à quelques secondes, pour les jeux de données utilisés dans ce sujet.

2 Génération aléatoire de Galaxies

Une galaxie G représente les forces en présence et correspond donc à la donnée de :
- n le nombre de bases de l'alliance,
- m le nombre de bases alien,
- p le nombre de routes inter-galactiques,
- la liste de $n+m$ couples (n_i, ϱ_i) distincts avec $0 \leqslant i < n+m$,
- la liste de p triplets $(i, j, \delta_{i,j})$ distincts avec $0 \leqslant i < n$ et $n \leqslant j < n+m$.



Dans la suite, toutes les complexités seront exprimées en fonction de n, m et p.
Considérons la suite d'entiers (u_k) définie pour $k \geqslant 0$ par :

$$u_k = \begin{cases} \textit{votre } \mathsf{u_0} \ \textit{(à reporter sur votre fiche)} & \text{si } k = 0 \\ 15\,091 \times u_{k-1} \mod 64\,007 & \text{si } k \geqslant 1 \end{cases}$$

Attention : On choisira u_0 strictement positif et inférieur ou égal à $64\,006$.

Question 1 *Que valent :* ***a)*** u_{10} ***b)*** u_{100} ***c)*** u_{1000}

Définition 1 *On note $G(n, m, p)$ la galaxie comportant n planètes de l'alliance, m planètes alien et telle que :*
- *la planète (de l'alliance) i (pour $0 \leqslant i < n$) dispose de $n_i = u_{2i} \mod 21$ vaisseaux au temps $t = 0$ et a un taux de production $\varrho_i = u_{2i+1} \mod 21$,*
- *la planète (alien) i (pour $n \leqslant i < n+m$) dispose de $n_i = u_{2i} \mod 7$ vaisseaux au temps $t = 0$ et a un taux de production $\varrho_i = u_{2i+1} \mod 7$,*
- *la planète (sous le contrôle de l'alliance) $(u_{2(n+m)+3i} \mod n)$ est à $(u_{2(n+m)+3i+1} \mod 50)$ années de la planète (alien) $(n + (u_{2(n+m)+3i+2} \mod m))$ pour $0 \leqslant i < p$. Si plusieurs voies inter-galactiques connectent deux planètes, on supprimera évidemment les doublons pour ne retenir que celle dont la durée est la plus courte.*

Question 2 *Indiquer si la première planète de l'alliance est reliée à la première planète alien (et si oui indiquer le nombre d'années requis pour s'y rendre) dans les galaxies suivantes ?*

a) $G(20, 10, 40)$ ***b)*** $G(20, 10, 200)$ ***c)*** $G(100, 50, 300)$

Un graphe est un couple $G = (S, A)$ d'ensembles satisfaisant $A \subseteq \mathcal{P}_2(S)$ où $\mathcal{P}_2(S)$ est l'ensemble des parties à 2 éléments de S. Les éléments de S sont appelés sommets et ceux de A arêtes. Le degré d'un sommet s est le nombre d'arêtes contenant s.

Un graphe $G = (S, A)$ est dit biparti si S peut être partitionné en deux parties S_1 et S_2 telles que pour tout $\{s, t\}$ appartenant à A : soit $s \in S_1$ et $t \in S_2$, soit $s \in S_2$ et $t \in S_1$. Dans la suite du sujet, on s'intéressera uniquement à des graphes bipartis.
Pour une date de départ t donnée (non nécessairement entière), la planète P_i vaincra la planète P_j si et seulement si le nombre (non nécessairement entier) de vaisseaux partant de P_i au temps t est supérieur ou égal au nombre de défenseurs en P_j au temps $t + \delta_{i,j}$.

Définition 2 *On note $G_t(m, n, p)$ le graphe comportant une arête entre P_i et P_j si et seulement si la planète P_i vainc la planète P_j en partant au temps t.*

Question 3 *Calculer le nombre d'arêtes, ainsi que le degré minimal et maximal des sommets représentant les planètes alien.*
a) $G_3(20, 10, 40)$ ***b)*** $G_{30}(20, 10, 200)$ ***c)*** $G_{50}(100, 50, 300)$

Le graphe G_t varie avec t mais le nombre de dates où ce graphe change est fini. Ces dates sont appelées instants critiques.

Question 4 *Calculer les instants critiques et indiquer le premier instant critique strictement positif pour les graphes suivants :*
a) $G_3(20, 10, 40)$ ***b)*** $G_{30}(20, 10, 200)$ ***c)*** $G_{50}(100, 50, 300)$

3 Plan de bataille

On appelle couplage d'un graphe $G = (S, A)$ un sous-ensemble C de A ne contenant aucun couple d'arêtes aboutissant au même sommet de S. La recherche d'un ensemble maximal d'arêtes ayant cette propriété s'appelle un problème de couplage maximal. Il est aisé de voir que l'Alliance remportera une victoire définitive contre les alien en lançant ses vaisseaux au temps t si et seulement s'il existe un couplage du graphe G_t de cardinal m.
Pour construire un couplage maximal, on peut générer systématiquement tous les couplages et choisir le meilleur. Cependant cet algorithme "benêt" a pour inconvénient d'avoir une complexité exponentielle en le nombre de routes inter-galactiques, ce qui risque de ne plaire au général en chef des forces de l'alliance. L'objet de cette partie est de concevoir un algorithme plus efficace afin d'éviter son courroux...

Définition 3 *On dira qu'un arête $e_1 = \{i_1, j_1\}$ est inférieure à une arête $e_2 = \{i_2, j_2\}$ (avec i_1, j_1 des sommets correspondant à une planète de l'alliance et i_2, j_2 des sommets correspondant à une planète alien) si et seulement si (i_1, j_1) est inférieur à (i_2, j_2) pour l'ordre lexicographique.*
Pour un graphe G donné, on note E l'ensemble trié des arêtes de G et C l'ensemble trié d'arêtes extrait de E en en sélectionnant une sur 10.

Question 5 *Donner la première arête de C et indiquer si C est un couplage ou non pour les ensembles suivants :*
a) $C_3(20, 10, 40)$ ***b)*** $C_{30}(20, 10, 200)$ ***c)*** $C_{50}(100, 50, 300)$

Une suite de sommets distincts $(x_0, x_1, \ldots, x_p)$ de G est appelée chaîne de longueur p si $\{x_0, x_1\}$, $\{x_1, x_2\}$, ..., $\{x_{p-1}, x_p\}$, sont des arêtes de G.
Soit C un couplage de G. Un sommet est dit saturé si c'est l'extrémité d'une arête de C (on dira sinon qu'il est insaturé). Une chaîne dans laquelle une arête sur deux est dans C et les autres dans $A \backslash C$ est dite alternée et une chaîne alternée reliant deux sommets insaturés par C est dite améliorante. Notons au passage qu'une chaîne améliorante a toujours une longueur impaire.
Étant donnés un couplage C et une chaîne améliorante C_A, il est toujours possible de construire un couplage de cardinalité supérieure en retirant dans C les sommets présents dans C_A et en insérant dans C les arêtes de C_A qui n'appartenaient pas à C. Ainsi, le nouveau couplage est composé des arêtes présentes dans C ou dans C_1 mais pas dans les deux simultanément
Question à développer pendant l'oral : Montrer qu'un couplage C est maximal s'il n'accepte aucune chaîne améliorante.
On peut alors en déduire un algorithme pour construire un couplage maximal en supposant que l'on sache construire une chaîne améliorante pour un couplage donné si elle existe. Reste donc à montrer comment construire une chaîne améliorante pour un couplage C donné.
Pour trouver une chaîne améliorante, il suffit de parcourir récursivement le graphe en partant des sommets de S_2 non saturées et en se déplaçant alternativement sur des arêtes n'appartenant pas au couplage et sur des arêtes y appartenant. À partir du moment où on arrive sur un sommet de S_1 non saturé, on a obtenu une chaîne améliorante. Lors de l'exploration, les sommets seront toujours explorés en allant de celui de plus petit indice à celui ayant le plus grand indice. Pour parcourir le graphe, il sera certainement utile d'avoir un tableau indiquant si un sommet a déjà été visité et s'il est saturé ou non.

Question 6 *Si l'ensemble C précédemment défini est un couplage, construire une chaîne améliorante et donner le plus petit indice de cette chaîne pour les graphes suivants :*
a) $G_3(20, 10, 40)$ ***b)*** $G_{30}(20, 10, 200)$ ***c)*** $G_{50}(100, 50, 300)$

Question 7 *Fusionner C et la chaîne améliorante précédente (si elle existe) et donner le plus petit indice des sommets couverts par C pour les graphes suivants :*
a) $G_3(20, 10, 40)$ ***b)*** $G_{30}(20, 10, 200)$ ***c)*** $G_{50}(100, 50, 300)$

Question 8 *Calculer un couplage maximal des graphes suivants et indiquer leur taille :*
a) $G_3(20, 10, 40)$ ***b)*** $G_{30}(20, 10, 200)$ ***c)*** $G_{50}(100, 50, 300)$

4 Calcul du jour J

Question 9 *Calculer le premier instant t permettant de prendre le contrôle des planètes aliens pour les galaxies suivantes :*
a) $G(20, 10, 40)$ ***b)*** $G(20, 10, 200)$ ***c)*** $G(100, 50, 300)$

On enlève maintenant la contrainte que tous les attaquants doivent partir de leur planète à la même date. En revanche, une fois qu'une planète a envoyé des attaquants, elle ne peut plus participer à une autre bataille.

Question 10 *Calculer le premier instant t permettant de prendre le contrôle des planètes aliens pour les galaxies suivantes :*

a) $G(20, 10, 40)$ ***b)*** $G(20, 10, 200)$ ***c)*** $G(100, 50, 300)$