Objets géométriques planaires iso-orientés

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juin/juillet 2006

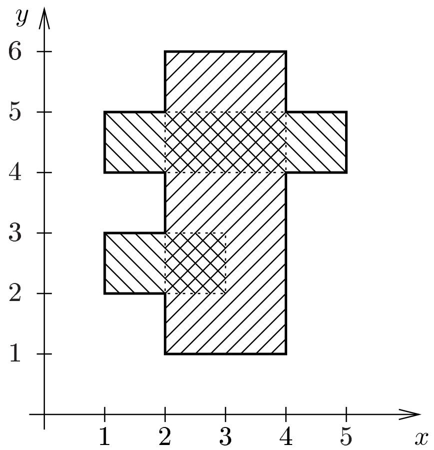
ATTENTION !

N'oubliez en aucun cas de recopier votre u_0
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

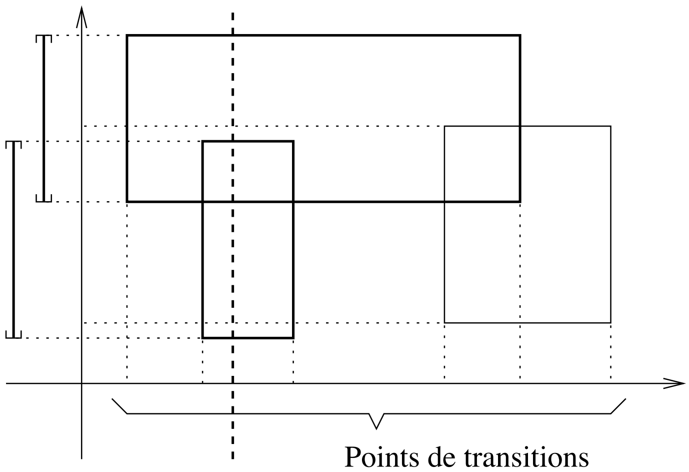
Important.
Lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main***.

1 Introduction

Le présent sujet développe certains aspects de l'algorithmique des objets géométriques du plan, constitués uniquement d'unions finies de rectangles, dits iso-orientés, dont les côtés sont parallèles aux axes d'un repère orthonormé. La figure ci-dessous représente une union de trois rectangles.



Pour simplifier la programmation, les coordonnées des sommets des rectangles seront entières. De plus, il sera supposé que les rectangles sont tous non dégénérés, c'est à dire que leurs côtés sont de longueur non nulle. Cette hypothèse restrictive sera levée dans la dernière partie du sujet.
Les techniques algorithmiques développées s'appuient sur le principe du balayage du plan, qui consiste à parcourir l'ensemble des objets géométriques dans un ordre particulier, fonction de leur position dans le plan. En partie 3, vous serez amenés à concevoir un algorithme de balayage qui énumérera les rectangles intersectés par une droite verticale, dite droite de balayage. En déplaçant la droite de balayage de la borne inférieure à la borne supérieure des abscisses, il sera possible d'énumérer l'ensemble des rectangles par valeurs croissantes de l'abscisse de leurs côtés verticaux.
Chaque déplacement de la droite de balayage vers la gauche ou vers la droite peut amener à intersecter des rectangles qui n'étaient pas intersectés auparavant ou bien à ne plus intersecter des rectangles qui l'étaient avant. Les abscisses auxquelles se produisent de tels changements sont appelés points de transitions. La figure ci-dessous illustre le principe des points de transitions, de la droite de balayage et des projections sur l'axe des ordonnées des rectangles intersectés par la droite de balayage.
Pour parvenir à des algorithmiques efficaces, vous serez amenés à employer deux structures de données particulières. La première, dite table des transitions, permet l'énumération des points de transitions, alors que la droite de balayage progresse de gauche à droite. La seconde, dite table des intervalles, permet de représenter, à tout instant, la projection sur l'axe des ordonnées de l'ensemble des rectangles intersectés par la droite de balayage. Cette dernière structure de données et les algorithmes associés sont abordés en partie 4.
L'emploi de façon conjointe de ces deux structures de données vous permettra de réaliser un algorithme efficace de calcul de l'aire et du périmètre d'une union finie de rectangles iso-orientés.



L'efficacité des programmes que vous concevrez sera prise en compte. En particulier, tout programme de complexité en mémoire ou en temps quadratique dans le nombre de rectangles ne sera pas considéré comme étant une réponse correcte. De plus, il vous sera demandé de calculer l'aire et le périmètre d'une union de 10 000 rectangles, que vous ne pourrez calculer dans le temps imparti qu'à la condition que vous ayez programmé des algorithmes efficaces. Il est à noter que tout programme mettant en œuvre les algorithmes et les structures de données préconisés par la suite, auront des temps d'exécutions inférieurs à quelques secondes, pour les jeux de données utilisés dans ce sujet.

2 Suite pseudo-aléatoire de rectangles

Considérons la suite d'entiers (u_n) définie pour $n \geq 0$ par :

$$u_n = \begin{cases} \textit{votre } \mathrm{u}_0 \textit{ (à reporter sur votre fiche)} & \text{si } n = 0 \\ 15\,091 \times u_{n-1} \mod 64\,007 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Attention : On choisira u_0 strictement positif et inférieur ou égal à 64 006.
On note (r_n) la suite de rectangles iso-orientés non dégénérés, définis pour $0 \leq n$ et dont les coordonnées du sommets inférieur gauche (x_n, y_n) et celles du sommet supérieur droit (x'_n, y'_n) sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} x_n &= u_{4n} \\ y_n &= u_{4n+1} \\ x'_n &= 1 + x_n + (u_{4n+2} \mod 13) \\ y'_n &= 1 + y_n + (u_{4n+3} \mod 13) \end{aligned}$$

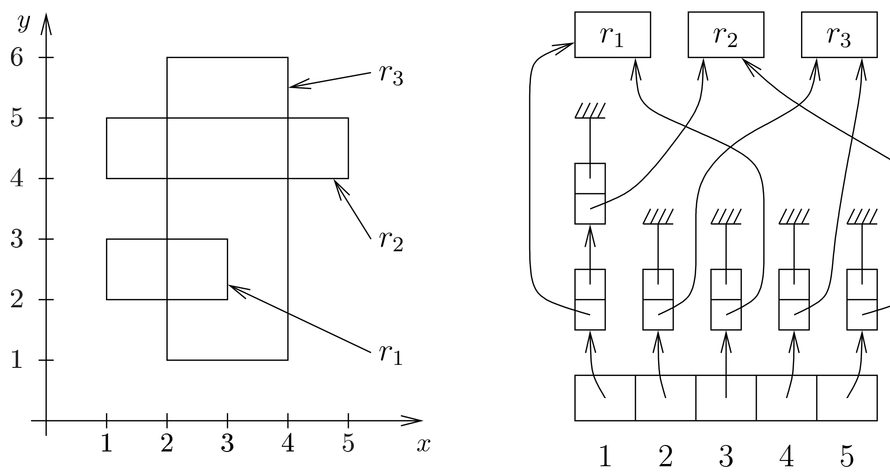
On note R l'ensemble des rectangles $\{r_n\}_{0 \leq n < 10\,000}$. Pour tout $r \in R$, on note (x_r, y_r) les coordonnées du sommet inférieur gauche de r et (x'_r, y'_r) les coordonnées de son sommet supérieur droit.

Question 1 ***a)*** *Quelle est l'aire du rectangle $r_{1\,000}$?* ***b)*** *Quel est le périmètre de ce même rectangle ?*

Question 2 *Quelles sont les coordonnées :* ***a)*** *du sommet inférieur gauche (x_{inf}, y_{inf}), et* ***b)*** *du sommet supérieur droit (x_{sup}, y_{sup}) du plus petit rectangle iso-orienté contenant les rectangles de R ?*

3 Table des transitions

La table des transitions est une structure de données permettant l'énumération des rectangles de R. Elle est construite à partir d'un tableau t indicé par les abscisses $X = \{\, x \in \mathbb{N} \,|\, x_{inf} \leq x \leq x_{sup} \,\}$, les entiers x_{inf} et x_{sup} étant les bornes calculées à la question précédentes. La valeur de l'élément de tableau d'indice $x \in X$ est une liste énumérant l'ensemble des rectangles r tels que l'un des côtés verticaux de r soit d'abscisse x :



On note T l'ensemble des points de transitions : $T = \{\, x \,|\, \exists r \in R$ tel que $x = x_r$ ou $x = x'_r \,\}$

Question 3 ***a)*** *En utilisant une table des transitions, que l'on initialisera avec l'ensemble de rectangles R, calculer le cardinal de l'ensemble des points de transitions T.*

On définit R_x, l'ensemble des rectangles de R intersectant la droite verticale d'abscisse x : $R_x = \{\, r \in R \,|\, x_r \leq x \leq x'_r \,\}$. On note b_x le cardinal de R_x.

Question 4 ***a)*** *Calculer la borne supérieure b_{sup} des b_x, pour tout $x \in X$.*

Question à développer pendant l'oral : Quelle est la complexité en temps et en mémoire de l'algorithme utilisé à la question précédente ?

4 Table des intervalles

La table des intervalles est une structure de données permettant de représenter, pour $x \in X$, l'ensemble d'intervalles I_x, constitué des projections sur l'axe des ordonnées des rectangles intersectés par une droite verticale d'abscisse x. Elle est constituée de tableaux indicés par $Y = \{ y \in N \,|\, y_{inf} \leq y \leq y_{sup} \}$ et permettant de calculer :

- pour tout $y \in Y$ tel que $y < y_{sup}$, le nombre de rectangles de R_x dont la projection sur l'axe des ordonnées contient l'intervalle ouvert $]y, y+1[$;
- pour tout $y \in Y$, le nombre de rectangles de R_x dont le côté inférieur (ou supérieur) est d'ordonnée y.

On remarquera qu'en utilisant une table des transitions et une table des intervalles, il est aisé de calculer I_{x+1}, en fonction de I_x. En conséquence, pour tout x entier compris entre x_{inf} et x_{sup}, I_x se calcule par récurrence à partir de $I_{x_{inf}}$.
Pour tout x, on note $m_x = \int_{y \in \cup I_x} dy$ la mesure de l'union des intervalles appartenant à I_x.

Question 5 ***a)*** *Calculer la borne supérieure m_{sup} des m_x pour tout $x \in X$*

Question à développer pendant l'oral : Quelle est la complexité en temps et en mémoire de algorithme mis en œuvre ? Détailler la structure de la table des intervalles et expliquer les opérations élémentaires sur cette structure de données.

5 Aire et périmètre d'une union finie de rectangles iso-orientés

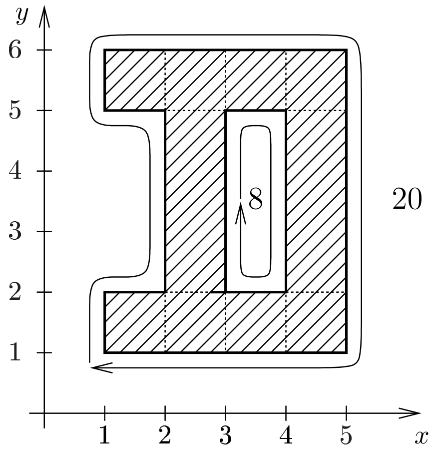
Le calcul de l'aire $a = \int\int_{(x,y) \in \cup R} dx\, dy$ se fait aisément en utilisant l'algorithme de calcul de m_x que vous avez programmé à la question précédente. Pour cela il sera utile de calculer la distance entre un point de transition donné et son successeur, si il existe.

Question 6 ***a)*** *Calculer l'aire de l'union des rectangles appartenant à R.*

Question à développer pendant l'oral : Quelle est la complexité en temps et en mémoire de votre algorithme ?
On remarquera que l'ensemble des côtés d'une union finie de rectangles iso-orientés est partitionné en circuits. Son périmètre est donc la somme des longueurs de ces circuits. La figure ci-dessous illustre le partitionnement en circuits et détaille le calcul du périmètre d'une union de 4 rectangles :
Le calcul du périmètre requiert le calcul de la longueur des segments des côtés horizontaux et verticaux d'un rectangle qui ne sont pas masqués par un autre rectangle.

Question 7 ***a)*** *Calculer la mesure des côtés verticaux de l'union des rectangles appartenant à R.*

Question 8 ***a)*** *Calculer la mesure des côtés horizontaux de l'union des rectangles appartenant à R.* ***b)*** *Utiliser le résultat de la question précédente pour calculer le périmètre de l'union des rectangles appartenant à R.*



Question à développer pendant l'oral : Quelle est la complexité en temps et en mémoire de l'algorithme utilisé ?

6 Cas des rectangles dégénérés

Rappelons qu'un rectangle est dit dégénéré si l'un de ses côtés est de longueur nulle. On distingue trois types de rectangles iso-orientés dégénérés : les segments horizontaux, les segments verticaux et les points. On commencera par traiter le cas des segments horizontaux.

Soit R^h l'ensemble des rectangles $\{r_n^h\}_{0\leq n<10\,000}$, avec r_n^h défini par les coordonnées de son sommet inférieur gauche (x_n^h, y_n^h) et de son sommet supérieur droit $(x_n'^h, y_n'^h)$:

$$\begin{aligned}
x_n^h &= u_{4n} \\
y_n^h &= u_{4n+1} \\
x_n'^h &= 1 + x_n + (u_{4n+2} \mod 13) \\
y_n'^h &= y_n + (u_{4n+3} \mod 14)
\end{aligned}$$

Question 9 ***a)*** *Calculer le périmètre de l'union des rectangles R^h.*

Le cas des segments verticaux est plus délicate à traiter. On fera particulièrement attention à la correction de l'algorithme de calcul de la mesure des côtés verticaux d'une union finie de rectangles iso-orientés.

Soit R^d l'ensemble des rectangles $\{r_n^d\}_{0\leq n<10\,000}$, avec r_n^d défini par les coordonnées de son sommet inférieur gauche (x_n^d, y_n^d) et de son sommet supérieur droit $(x_n'^d, y_n'^d)$:

$$\begin{aligned}
x_n^d &= u_{4n} \\
y_n^d &= u_{4n+1} \\
x_n'^d &= x_n + (u_{4n+2} \mod 14) \\
y_n'^d &= y_n + (u_{4n+3} \mod 14)
\end{aligned}$$

Question 10 ***a)*** *Calculer le périmètre de l'union des rectangles R^d.*

Question à développer pendant l'oral : Décrire les modifications apportées aux structures de données. Décrire l'algorithme utilisé pour calculer la mesure des côtés verticaux d'abscisse x de l'union des rectangles appartenant à R^d. Quelle est la complexité en temps de l'algorithme ?

$\diamond$
$\diamond \quad \diamond$
$\diamond$