

# Généalogie

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation  
Concours commun des écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juillet 2005

**ATTENTION !**

N'oubliez en aucun cas de recopier votre  $u_0$   
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

## **Important.**

Lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!

Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre  $n$ , on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple:  $O(n^2)$ ,  $O(n \log n)$ ,...

Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de *tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main.*

# 1 Préliminaires

On utilisera la suite (pseudo-aléatoire) d'entiers positifs  $(u_n)$  définie ci-dessous :

- $u_0$  est donné sur votre table.
- $u_n = (13\,421 \times u_{n-1}) \bmod 79\,973$ , pour  $n > 0$ .

**Question 1** *Que valent **a)**  $u_3$  et **b)**  $u_{992359}$  ?*

# 2 Arbre des descendants

On cherche à étudier l'arbre des descendants d'une personne. Cet arbre est constitué de cette personne (appelée l'ancêtre de l'arbre), de ses enfants, petits-enfants *etc.*, sans limite de génération. On suppose qu'il n'y a pas de mariage entre descendants. Dans la suite, on appellera taille de l'arbre le nombre de personnes dans cet arbre.

## 2.1 Création par filiation

On crée un arbre des descendants de taille  $N$  pseudo-aléatoire de la manière suivante : on numérote les personnes de cet arbre de 0 à  $N - 1$  et on pose que le père de l'individu  $i > 0$  est l'individu  $u_{2i} \bmod j$ .

**Question 2** *Vous montrerez à l'oral que l'arbre des descendants ainsi construit est bien un arbre (en particulier qu'il ne contient aucun cycle).*

**Question 3** *Quel est le nombre d'enfants de l'ancêtre pour **a)**  $N = 10$ , **b)**  $N = 100$  et **c)**  $N = 10\,000$  ?*

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.*

**Question 4** *Quel est le nombre de personnes sans enfant quand **a)**  $N = 10$ , **b)**  $N = 100$  et **c)**  $N = 10\,000$  ?*

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.*

## 2.2 Génération

On définit la génération des personnes d'un arbre des descendants de la façon suivante :

- La génération de l'ancêtre de l'arbre des descendants est 1.
- La génération d'une autre personne est celle de son père plus un.

**Question 5** *Quelle est la génération de la personne numéro  $N-1$  lorsque **a)**  $N = 10$ , **b)**  $N = 100$  et **c)**  $N = 10\,000$  ?*

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.*

**Question 6** *Quelle est la génération la plus nombreuse et quel est le nombre de personnes de cette génération pour **a)**  $N = 10$ , **b)**  $N = 100$  et **c)**  $N = 10\,000$  ?*

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.*

## 2.3 Patronymes

On ajoute l'information du sexe à l'arbre des descendants : la personne numéro  $i$  est de sexe masculin si et seulement si  $u_{2i+1}$  est pair.

**Question 7** *Quel est le sexe de la personne numéro  $N - 1$  pour **a)**  $N = 10$ , **b)**  $N = 1\,000$  et **c)**  $N = 10\,000\,000$  ?*

Les personnes de l'arbre des descendants portent toutes un nom, que nous ne cherchons pas à expliciter. Nous considérerons simplement l'information des noms comme une partition des individus de l'arbre. Pour savoir si deux individus portent le même nom, on utilisera les règles suivantes : deux individus  $x$  et  $y$  ont le même nom si et seulement si

- $x$  est le père de  $y$  ou  $y$  est le père de  $x$ ,
- ou  $x$  et  $y$  ont la même mère,
- ou il existe un individu  $z$  tel que  $x$  a le même nom que  $z$  et  $y$  a le même nom que  $z$ .

Notez que cela signifie que le nom d'une personne est celui de son père, et que si son père n'est pas dans l'arbre, alors on lui associe un nouveau nom, partagé avec ses frères et soeurs.

**Question 8** *Quel est le nombre de personnes portant le nom de l'ancêtre quand **a)**  $N = 10$ , **b)**  $N = 100$  et **c)**  $N = 10\,000$  ?*

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.*

**Question 9** *Quel est le nombre de noms différents portés par les personnes de l'arbre des descendants quand **a)**  $N = 10$ , **b)**  $N = 100$  et **c)**  $N = 10\,000$  ?*

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.*

## 2.4 L'héritier

Votre valeur de  $u_0$  est choisie pour que  $u_1$  soit pair et donc que l'ancêtre soit un homme. Selon la loi salique, l'héritier de l'ancêtre est défini comme le premier homme qui n'a pas d'homme parmi ses descendants, atteint dans l'ordre du parcours de l'arbre suivant : si une personne a au moins un fils, on passe au fils de plus petit numéro, sinon, on passe à la fille de plus petit numéro qui a au moins un homme parmi ses descendants.

Notez que si l'ancêtre n'a pas d'homme parmi ses descendants, son héritier est lui-même.

**Question 10** *Quel est le numéro de l'héritier de l'ancêtre quand **a)**  $N = 10$ , **b)**  $N = 100$ , **c)**  $N = 10\,000$  et **d)**  $N = 400\,000$  ?*

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.*

L'héritier est aussi appelé héritier de rang 1. L'héritier de rang  $n$  est l'héritier déterminé en supprimant tous les héritiers de rang strictement plus petit que  $n$  de l'arbre des descendants. Informellement, l'héritier de rang  $n$  est celui qui héritera de l'ancêtre si les  $n - 1$  héritiers précédents meurent avant l'ancêtre.

**Question 11** Calculez le numéro de

- **a)** l'héritier de rang 2 lorsque  $N = 10$ ,
- **b)** l'héritier de rang 5 lorsque  $N = 100$ ,
- **c)** l'héritier de rang 10 lorsque  $N = 1\,000$ ,
- **d)** l'héritier de rang 1 500 lorsque  $N = 5\,000$ ,

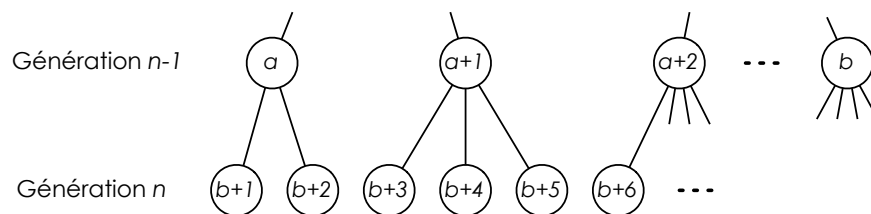
★ Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.

### 3 Construction chronologique

Pour obtenir un arbre des descendants un peu plus réaliste, vous allez construire un nouvel arbre dans l'ordre des générations. Vous utiliserez un paramètre supplémentaire,  $F$ , qui est le nombre maximum d'enfants par famille plus un.

L'arbre est défini génération par génération, en numérotant les individus, de la manière suivante :

- La première génération ne contient qu'un individu, l'ancêtre, dont le numéro est 0.
- La génération  $n > 1$  est définie en parcourant les individus de la génération  $n - 1$ , dans l'ordre de leur numéro. Soient  $a$  et  $b$  les numéros minimum et maximum des individus de la génération  $n - 1$ . L'individu  $k$  de la génération  $n - 1$  a  $(u_{4k} \bmod F)$  fils qui appartiennent la génération  $n$ . Les individus de la génération  $n$  sont numérotés en partant du numéro  $b + 1$  en commençant par les enfants de l'individu  $a$ , puis ceux de l'individu  $a + 1$ , etc. jusqu'à ceux de l'individu  $b$ .



Suivant cette numérotation, l'individu numéro  $k$  est un homme si et seulement si  $u_{4k+1}$  est pair. L'arbre ainsi construit est potentiellement infini, mais si c'est le cas on ne regardera que les  $N$  premiers individus et leurs enfants.

**Question 12** Quelle est la plus grande génération des  $N$  premiers individus lorsque **a)**  $N = 10$  et  $F = 3$ , **b)**  $N = 100$  et  $F = 4$ , **c)**  $N = 200$  et  $F = 3$  et **d)**  $N = 10\,000$  et  $F = 5$  ?

★ Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.

**Question 13** Quel est le nombre de personnes avec le nom de l'ancêtre parmi les  $N$  premiers individus quand **a)**  $N = 10$  et  $F = 3$ , **b)**  $N = 100$  et  $F = 3$  et **c)**  $N = 10\,000$  et  $F = 5$  ?

★ Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.

### 3.1 Ajout du temps

On va ajouter dans l'arbre les dates de naissance et de décès :

- La date de naissance de l'ancêtre est 0.
- La date de naissance du premier enfant d'un individu né à la date  $d$  est  $(u_{4i+2} \bmod 10) + d + 15$  où  $i$  est le numéro de cet enfant.
- Sinon, l'enfant numéro  $i$  est né juste après un enfant numéro  $i - 1$  né à la date  $d$ , et sa date de naissance est  $(u_{4i+2} \bmod 10) + d$ .
- L'âge de décès d'une personne  $i$  sans enfant est  $u_{4i+3} \bmod 80$ .
- La date de décès d'une personne  $i$  née à la date  $d$  et dont le dernier enfant est né à la date  $e$  est le maximum de  $(u_{4i+3} \bmod 80) + d$  et de  $(u_{4i+3} \bmod 20) + e$ . Notez que pour calculer les dates de décès des  $N$  premiers individus, il peut être nécessaire de calculer les dates de naissance de plus de  $N$  individus.

**Question 14** *Quelle est la plus grande date de naissance des  $N$  premiers individus quand* **a)**  $N = 10$  et  $F = 3$ , **b)**  $N = 100$  et  $F = 3$  et **c)**  $N = 10\,000$  et  $F = 10$  ?

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.*

**Question 15** *Quel est la durée de vie maximum des  $N$  premiers individus et combien d'individus atteignent cet âge lorsque* **a)**  $N = 10$  et  $F = 3$ , **b)**  $N = 100$  et  $F = 3$  et **c)**  $N = 10\,000$  et  $F = 10$  ?

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.*

Un individu est vivant à la date  $d$  si  $d$  est supérieur ou égal à sa date de naissance et strictement inférieur à sa date de décès.

**Question 16** *Combien d'individus sont vivants à la plus grande date de naissance des  $N$  premiers individus de l'arbre quand* **a)**  $N = 10$  et  $F = 3$ , **b)**  $N = 100$  et  $F = 3$  et **c)**  $N = 10\,000$  et  $F = 10$  ?

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.*

### 3.2 Lignées

La lignée est la suite des héritiers définie de la manière suivante : le premier individu de la lignée est l'ancêtre, le  $n^{\text{ième}}$  individu de la lignée est l'héritier de plus petit rang de la  $n - 1^{\text{ième}}$  personne de la lignée, vivant à la date de décès de cette dernière. La lignée s'arrête quand pour tout  $k$ , il n'existe pas d'héritier au rang  $k$  vivant.

**Question 17** *Donnez la lignée quand* **a)**  $N = 10$  et  $F = 3$ , puis quand **b)**  $N = 100$  et  $F = 3$  et enfin quand **c)**  $N = 10\,000$  et  $F = 6$ .

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.*

La lignée complète est la suite d'individus définie comme :

- Le premier individu est l'ancêtre.
- Si la  $n^{\text{ième}}$  personne a un héritier de rang  $k$  vivant à sa mort, alors le  $n + 1^{\text{ième}}$  individu est l'héritier de plus petit rang de la  $n^{\text{ième}}$  personne, vivant à la date du décès de cette dernière.

- Sinon, le  $n + 1^{\text{ième}}$  individu de la lignée complète est l'héritier de plus petit rang de la  $n - 1^{\text{ième}}$  personne, vivant à la date de décès du  $n^{\text{ième}}$ , et s'il n'existe pas, on prend celui de la  $n - 2^{\text{ième}}$  personne vivant à la date de décès du  $n^{\text{ième}}$ , etc.
- La lignée complète s'arrête si l'ancêtre n'a pas d'héritier de rang  $k$  vivant à la date de décès du dernier individu de la lignée complète.

La personne au pouvoir à la date  $d$ , si elle existe, est l'individu de la lignée complète vivante à la date  $d$ , de plus petit rang dans la lignée complète.

**Question 18** Donner le numéro de la personne au pouvoir à la plus grande date de naissance des  $N$  premiers individus de l'arbre quand **a)**  $N = 10$  et  $F = 3$ , puis quand **b)**  $N = 100$  et  $F = 3$  et enfin quand **c)**  $N = 10\,000$  et  $F = 6$ .

★ Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.

