Concours commun des Écoles Normales Supérieures
Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation

Jeu de la vie

Durée de l'épreuve : 4 heures — Coefficient : 4

Juillet 2003

Note. Lorsque la description d'un algorithme est demandée, celle-ci doit être courte et précise. Quand on demande la complexité d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande un ordre de grandeur du temps de calcul dans le cas le pire, par exemple $O(n^2)$ ou $O(n \log n)$.

1 Préliminaires

Jeu de la vie. Ce problème est consacré à l'étude de l'évolution d'une population de *cellules*, dont la naissance et la mort se décide au moyen de règles algorithmiques inventées par John Conway en 1970.

L'univers considéré est un quadrillage, où chaque case peut être dans deux états possibles : soit vide, soit occupée par une cellule. La configuration de l'univers à un instant t est ainsi l'état d'un automate.
Chaque case a 8 voisines, 4 en diagonale et 4 orthogonales. Pour passer de l'instant t à l'instant $t+1$, les règles ci-dessous définissent la nouvelle configuration.

- **Règle de mort.** Si à l'instant t une case contient une cellule vivante qui a exactement 2 ou 3 voisines vivantes, elle contient une cellule vivante à l'instant $t+1$. Sinon la cellule meurt et la case devient vide.
- **Règle de naissance.** Si à l'instant t une case est vide et a exactement 3 voisines vivantes, elle contient une cellule vivante à l'instant $t+1$. Sinon cette case reste vide.

La suite d'entiers positifs (u_n) ci-dessous servira à définir la configuration initiale de l'univers.

- u_0 est donné sur votre table. **(À reporter en haut de votre copie !)**
- $u_n = (16383 \times u_{n-1}) \bmod 59047$, pour $n > 0$.

Question 1 *Que valent u_{996} et u_{9996} ?*

Question 2 *On définit $v_i = 1$ si $u_i \equiv 0 \pmod 3$ et $v_i = 0$ sinon. Combien y a-t-il d'indices i tels que $v_i = 0$, pour $0 \leq i < 10000$?*

2 Le jeu torique

Dans cette section, l'univers est un tore de dimensions $k \times k$. Cela signifie que l'univers est un carré de dimensions $k \times k$ où les cases du bord supérieur sont voisines de celles du bord inférieur et où les cases du bord droit sont voisines de celles du bord gauche. Pour chaque question, on donnera si possible la réponse pour les cas $k = 9$, $k = 20$, $k = 40$ et $k = 100$. Si votre programme s'avère trop lent, il est déconseillé d'attendre passivement le résultat pour les valeurs élevées de k.
La configuration de départ, correspondant à l'instant $t = 0$, est définie comme suit : la case de coordonnées (i, j), pour $0 \leq i, j < k$, contient une cellule vivante si, et seulement si, $v_{i+j\times k} = 1$.

Question 3 *Pour la configuration de départ ($t = 0$), la case de coordonnées $(1, 0)$ contient-elle une cellule vivante ?*

Question 4 *Combien y a-t-il de cellules vivantes aux instants $t = 0$, $t = 1$, $t = 10$, $t = 100$, $t = 1000$ et $t = 10000$? Décrivez votre algorithme et la structure de données. Évaluez la complexité de votre algorithme en fonction de k et t.*

L'univers, soumis aux règles du jeu de la vie, est un automate déterministe. Il est possible qu'il existe deux instants $t_0 < t_1$ où l'univers est dans la même configuration.

Question 5 *Montrez que, dans le cas de l'univers torique, deux tels instants existent toujours.*

On notera t_0 et t_1 les plus petites valeurs telles que l'univers est dans la même configuration. On appelle alors *période de l'attracteur* la valeur $t_1 - t_0$ et *temps d'attraction* la valeur t_0.

Pour déterminer les valeurs t_0 et t_1, vous pourrez utiliser un algorithme de codage compact d'une configuration (non nécessairement injectif), pour pouvoir stocker simultanément toutes les configurations pour $t \leq t_1$.

Question 6 *Calculez la période de l'attracteur et le temps d'attraction. Décrivez votre algorithme, et (le cas échéant) le codage compact utilisé. Évaluez sa complexité en fonction de k et t_1.*

On appelle *chemin* dans un quadrillage une suite de cases telle que deux cases consécutives soient voisines (on rappelle que chaque case a 8 voisines). L'ensemble des cellules vivantes de l'univers peut être découpé en *îlots*, qui sont les composantes connexes définies par la relation de voisinage : entre deux cellules vivantes d'un même îlot, il y a toujours un chemin ne passant que par des cellules vivantes.

Question 7 *Pour la configuration de départ ($t = 0$), calculez le nombre de cellules de l'îlot contenant la cellule de coordonnées* $(1, 0)$.

Question 8 *Calculez le nombre d'îlots aux temps $t = 0$, $t = 1$, $t = 10$ et $t = t_0$. Décrivez votre algorithme. Évaluez sa complexité.*

De la même façon que le voisinage d'une case contient 9 cases (la case et ses 8 voisines), on peut définir le *X-voisinage* qui contient 25 cases : les voisines de ses voisines. On appelle *X-chemin* dans un quadrillage une suite de cases telle que deux cases consécutives soient X-voisines. L'ensemble des cellules vivantes de l'univers peut aussi être découpé en *îles*, qui sont les composantes connexes définie par la relation de X-voisinage : entre deux cellules vivantes d'une même île, il y a toujours un X-chemin ne passant que par des cellules vivantes.

Question 9 *Pour la configuration de départ ($t = 0$), calculez le nombre de cellules de l'île contenant la cellule de coordonnées* $(1, 0)$.

Question 10
Calculez le nombre d'îles aux temps $t = 0$, $t = 1$, $t = 10$ et $t = t_0$. Décrivez votre algorithme. Évaluez sa complexité.

3 Le jeu infini

Dans cette section, l'univers est infini. Le paramètre k définit la taille de la zone initiale. Pour chaque question, on donnera la réponse pour les cas $k = 9$, $k = 20$ et $k = 40$. Si votre programme s'avère trop lent, il est déconseillé d'attendre passivement le résultat pour les valeurs élevées de k.
La configuration de départ, correspondant à l'instant $t = 0$, est définie comme suit : la case de coordonnées $(i, j)_{0 \leq i,j < k}$ est vivante si, et seulement si, $v_{i+j\times k} = 1$, et les autres cases sont vides.

Question 11 *Combien y a-t-il de nombre de cellules vivantes aux instants $t = 0$, $t = 1$, $t = 10$, $t = 100$, $t = 1000$ et $t = 10000$? Décrivez votre algorithme et la structure de données. Évaluez la complexité de votre algorithme. NB : il est probable que votre algorithme ne puisse répondre à la question pour $t = 10000$, par exemple à cause d'une mémoire insuffisante, ou d'un temps de calcul déraisonnable. Vous pouvez alors envisager une structure de données creuse.*

Question 12
Calculez le nombre d'îles aux temps $t = 0$, $t = 1$, $t = 10$, $t = 100$ et $t = 1000$.

Comme précédemment, il est possible qu'il existe deux instants $t_0 < t_1$ où l'univers est dans la même configuration. On dit alors que la configuration initiale était dans un *bassin d'attraction*. Malheureusement, on peut prouver qu'il n'est pas possible de concevoir un algorithme qui permette de décider, pour toute configuration, si celle-ci est dans un bassin d'attraction.

Un exemple de configuration particulière est le *glisseur*. C'est une configuration qui n'est pas périodique, mais qui après quelques itérations réapparaît à l'identique, décalée de quelques cases.

En pratique pour le jeu de la vie infini, à partir d'une configuration de départ aléatoire, seuls deux cas sont très probables :
- Après un nombre suffisant d'itérations, l'univers est périodique (la configuration initiale est dans un bassin d'attraction).
- Après un nombre suffisant d'itérations, on peut décomposer l'univers en deux parties : un cœur périodique, et quelques glisseurs qui s'éloignent.

Question 13 *Très souvent le cœur est de période 2, et la valeur u_0 donnée sur votre table a été choisie pour que ce soit le cas. Décrivez en détail un algorithme qui permette de déterminer la configuration finale. Programmez cet algorithme : combien y a-t-il de glisseurs et quel est le nombre de cellules vivantes du cœur ?*