Matrices 0-1

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation

Juillet 2002

Le sujet propose diverses manipulations d'une matrice carrée T de taille $n = 60$ dont tous les éléments valent 0 ou 1. On définit la suite récurrente d'entiers $(x_i)_{0 \leq i \leq n^2}$ par :
- x_0 est égal au numéro inscrit sur votre table d'examen (on pourra prendre toute valeur entre 23 et 30, par exemple),
- $x_i = (x_{i-1} \times x_{i-1})$ modulo 3953 pour i compris entre 1 et n^2.

La matrice est initialisée comme suit :

$$\text{Pour } 1 \leq i, j \leq n, i \neq j, \text{ si } x_{(i-1)n+j} = 1 \text{ modulo } 4 \text{ alors } T[i,j] = 1 \text{ sinon } T[i,j] = 0.$$

On pose enfin $T[i,i] = 1$ pour $1 \leq i \leq n$.

Partie I. Préliminaires

Question I.1. Combien d'éléments de la matrice T sont-ils égaux à 0 ?

Question I.2. Combien de colonnes de la matrice T contiennent-elles strictement plus de 0 que de 1 ? quel est le plus petit indice (s'il existe) d'une telle colonne ?

Partie II. Éléments booléens

On considère ici les éléments de la matrice comme des booléens de valeur "vrai" ou "faux", c'est-à-dire avec l'arithmétique $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = 1$, $0 \times 0 = 0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$, et $1 \times 1 = 1$. Cette arithmétique s'étend aux matrices de façon usuelle.

Question II.1. Combien d'éléments de la matrice $T^2 = T \times T$ sont égaux à 1 ?

Question II.2.

1. Montrer (faire une preuve écrite) qu'il existe un indice $p \geq 2$ tel que $T^p = T^{p-1}$.
2. On cherche à déterminer $p_{\min}$, le plus petit p qui répond à la question. Expliquer brièvement l'algorithme que vous mettez en oeuvre.
3. Définir parmi les opérations élémentaires effectuées par votre programme celles qui sont les plus significatives ; indiquer (en ordre de grandeur) leur nombre en fonction de n.
4. Quelle est la valeur de $p_{\min}$ et des deux éléments de $T^{p_{\min}}$ d'indices $(i, j) = (24, 25)$ et $(16, 29)$?

Question II.3. Le *bon compte* d'un triplet $(i1, i2, i3)$ indiçant trois lignes distinctes de T est défini comme le nombre de composantes j telles que $T[i1, j] + T[i2, j] = T[i3, j]$. On cherche quel est le bon compte maximal qu'il est possible d'obtenir.

1. Expliquer brièvement l'algorithme que vous mettez en oeuvre, et préciser (en ordre de grandeur) le nombre d'opérations effectuées.
2. Donner la valeur du bon compte maximal, et les indices d'un triplet réalisant ce bon compte.

Partie III. Composantes connexes

On interprète la matrice T comme une image binaire, les points de l'image étant les éléments de T égaux à 1. Les quatre voisins de l'élément $T[i, j]$ sont les éléments $T[i \pm 1, j]$ et $T[i, j \pm 1]$ (s'ils existent). On définit la relation binaire d'adjacence comme suit : deux points sont adjacents s'ils sont dans l'image (égaux à 1) et s'ils sont voisins. Une composante connexe est une classe d'équivalence de la fermeture réflexive et transitive de la relation d'adjacence : deux points de l'image sont dans la même composante connexe s'il existe un chemin de points adjacents les reliant.

Question III.1. Chaque point (i, j) de l'image (tel que $T[i, j] = 1$) reçoit l'étiquette $(i - 1)n + j$. Chaque point (i, j) tel que $T[i, j] = 0$ reçoit l'étiquette 0. Construire le tableau U tel que :
- si $T[i, j] = 1$, alors $U[i, j]$ est le maximum de l'étiquette du point (i, j) et de celle de ses voisins (quatre en général, attention aux bords) ;
- si $T[i, j] = 0$, alors $U[i, j] = 0$.

Combien de valeurs non-nulles différentes contient le tableau U ?

Question III.2. Quel est le nombre de composantes connexes dans le tableau T ? Expliquer brièvement l'algorithme que vous mettez en oeuvre, et préciser (en ordre de grandeur) le nombre d'opérations effectuées.

Question III.3. Quel est le cardinal maximal d'une composante connexe ? Combien de composantes connexes sont-elles de cardinal maximal ?

Question III.4. La distance absolue de deux éléments $T[i, j]$ et $T[i', j']$ est définie comme $|i' - i| + |j' - j|$. Quelle est la distance absolue maximale entre deux éléments du tableau qui appartiennent à la même composante connexe ?

Question III.5. La distance dans l'image de deux éléments appartenant à une même composante connexe est la longueur du plus court chemin de points adjacents les reliant. Quelle est la distance dans l'image entre deux éléments du tableau qui appartiennent à la même composante connexe ? Expliquer brièvement l'algorithme que vous mettez en oeuvre, et préciser (en ordre de grandeur) le nombre d'opérations effectuées.

Partie IV. Découpage

On découpe récursivement la matrice T en régions rectangulaires comportant au plus trois points égaux à 1. On utilise le processus suivant, où le rectangle initial est toute la matrice :
- tant qu'un rectangle contient au moins quatre points égaux à 1, on le découpe ;
- le processus s'arrête quand il n'y a plus de rectangle à découper.

Soit un rectangle R à découper, comprenant $m \geq 4$ points de l'image, avec L lignes et C colonnes. On cherche à découper R en deux rectangles comprenant approximativement le même nombre de points égaux à 1.

Formellement, on compare deux solutions :

Découpe horizontale : R_1 est composé des h premières lignes de R et contient m_1 points égaux à 1, et R_2 est composé des $L - h$ dernières lignes de R et contient m_2 points égaux à 1 ($m_1 + m_2 = m$). On choisit h pour minimiser la différence $|m_2 - m_1|$ (et on prend la plus petite valeur de h s'il y en a plusieurs qui réalisent le minimum).

Découpe verticale : même principe avec les colonnes.

On retient la solution qui minimise la différence du nombre de 1 entre les deux rectangles (en cas d'égalité, on prend la solution obtenue par découpe horizontale).

Question IV.1.

1. Expliquer brièvement l'algorithme que vous mettez en oeuvre, et préciser (en ordre de grandeur) le nombre d'opérations effectuées.
2. En combien de rectangles le tableau T est-il découpé par le processus ?